



پاسخ بزرگ مرحله ی دوم المپیاد ریاضی فرمول وحدت ۲۰۱۸/۲۰۱۹

راه حل مساله ی ۱

در ابتدا شکل را به ۹ قطعه تقسیم می کنیم (توسط ۳ خط که از روی خطوط شکل عبور کرده از هر طرف می گذرانند)
 تعداد مثلث های دارای ضلع واحد برابر است با: Δ $20 \times 4 = 80$ (در هر قطعه از ۹ قطعه ۲۰ مثلث)
 تعداد مثلث های دارای ۲ ضلع واحد برابر است با: Δ

در هر قطعه ۱۱ عدد (فاصله در قطعه) $11 \times 4 = 44$

تعداد دارند و محصور شده اند / نه به آنها / سلام می کنیم

۴۸ مثلث وجود دارند که در دو قطعه $(14 \times 4) - 4 = 52$

از ۹ قطعه اولی که شده اند که بر واقع هر یک از سه قطعه که ۹ قطعه را جدا می کنند ۱۴ تا از این مثلث ها را قطع می کنند. از این ۴۸ عدد مثلث ۹ تا از آنها هستند که در سه قطعه کسر شده اند و توسط ۹ خط قطع شده اند که دوباره حساب می شوند.



۹ مثلث واحد برابر است با: Δ

در هر قطعه ۴ عدد سالم $4 \times 4 = 16$

هر یک از روی خطوط متقاطع ۲ عدد وجود $(10 \times 4) - 12 - (2 \times 2) = 24$

دارد که ۱۳ تا از آنها توسط دو خط قطع شده و در دو قطعه کسر شده. که دوباره به حساب نمی آید و آن ها که در هر طرف قرار دارند ۴ با قطع شده، سه بار حساب شده پس دوباره کم می کنیم.

از این مرحله به بعد دو مثلث اصلی که در هم فرو رفته اند را بدقت می لایم و شروع به می سبب مثلث های با ضلع برابر می کنیم: با ضلع ۱۳ واحد

از مثلث بزرگ به ضلع ۱۳ واحد سه واحد با این سه مثلث های واحد به شکل Δ \rightarrow ضلع ۴

و نه ∇ مثلث را پس یک مثلث به ضلع ۴ اند (همچنین لایمی که در این مرحله) که در یک مثلث بزرگتر به ضلع ۹ قرار می گیرند که در این مثلث به صورت یک مربع درونش مثلث مورد نظر ما یعنی ضلع ۴ هستند که تعدادشان برابر است با:

$9 \times 9 - \frac{1 \times 9}{2} = 81 - 4.5 = 76.5$

و به همین صورت در مورد مثلث های با ضلع بیشتر هم داریم $2 \times 49.5 = 99$ و چون دو مثلث اصلی داریم

$7 \times 7 - \frac{4 \times 7}{2} = 49 - 14 = 35$

$5 \times 5 - \frac{4 \times 5}{2} = 25 - 10 = 15$

$3 \times 3 - \frac{2 \times 3}{2} = 9 - 3 = 6$

$1 \times 1 = 1$

$28 \times 2 = 56$

$15 \times 2 = 30$

$4 \times 2 = 8$

$1 \times 2 = 2$

$21 \times 2 = 42$ $4 \times 4 - \frac{2 \times 4}{2} = 16 - 4 = 12$

$10 \times 2 = 20$ $4 \times 4 - \frac{3 \times 4}{2} = 16 - 6 = 10$

$3 \times 2 = 6$ $2 \times 2 - \frac{1 \times 2}{2} = 4 - 1 = 3$

$120 + 44 + 42 + 34 + 24 + 90 + 72 + 56 + 42 + 30 + 20 + 13 + 6 + 2 = 948$

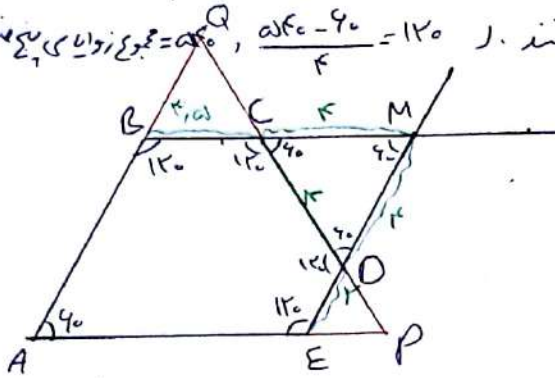




پاسخ بزرگ مرحله ی دوم المپیاد ریاضی فرمول وحدت ۲۰۱۸/۲۰۱۹

راه حل مساله ی ۲:

ابتدا زاویه A را به همراه دو پاره‌ها AB و AE رسم می‌کنیم. من رانیم $\hat{A} = 40^\circ$ و بقیه زوایا با هم برابرند پس زاویه های $\hat{B} = \hat{C} = \hat{D} = \hat{E} = 140^\circ$ هستند. $\frac{140 - 40}{4} = 30^\circ$ مجموع زوایای بیخ منتهی (محل برخورد اضلاع)



محل برخورد اضلاع \hat{E} و \hat{B} را رسم می‌کنیم

محل برخورد اضلاع \hat{E} و \hat{B} را رسم می‌کنیم

زاویه های رسم شده را M می‌نامیم

چهارضلع $ABME$ یک متوازی الاضلاع است.

پاره‌ها CD به گونه ای قرار دارد که C بر روی BM و D بر روی EM قرار دارد و

$\hat{BCD} = \hat{CDE} = 140^\circ$ است. $CD = 4$ و $EDC = \hat{BCD} = 140^\circ$ باشد

پس مثلث CMD قائم‌الاضلاع می‌باشد.

پاره‌ها CD را از دو طرف امتداد می‌دهیم تا خطوط AE و AB را قطع کند. محل تقاطع

را به ترتیب P و Q می‌نامیم.

$\hat{MCD} = 40^\circ \Rightarrow \hat{QCB} = 40^\circ$
 $\hat{CBA} = 40^\circ \Rightarrow \hat{QBC} = 40^\circ$ } پس مثلث BCQ قائم‌الاضلاع \Rightarrow
 چون $\hat{BQC} = 90^\circ$ و به همین ترتیب

$\hat{DPE} = 40^\circ$

پس مثلث APQ نیز قائم‌الاضلاع است و فاصله CD تا A برابر با همان ارتفاع مثلث است.

$$\text{طول ضلع مثلث} = AP = AE + EP = 7 + 2 = 9$$

$$\text{ارتفاع} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 9 = \left(\frac{9\sqrt{3}}{2} \right)$$



پاسخ برگ مر حله ی دوم المپیاد ریاضی فرمول وحدت ۲۰۱۸/۲۰۱۹

راه حل مساله ی ۳:

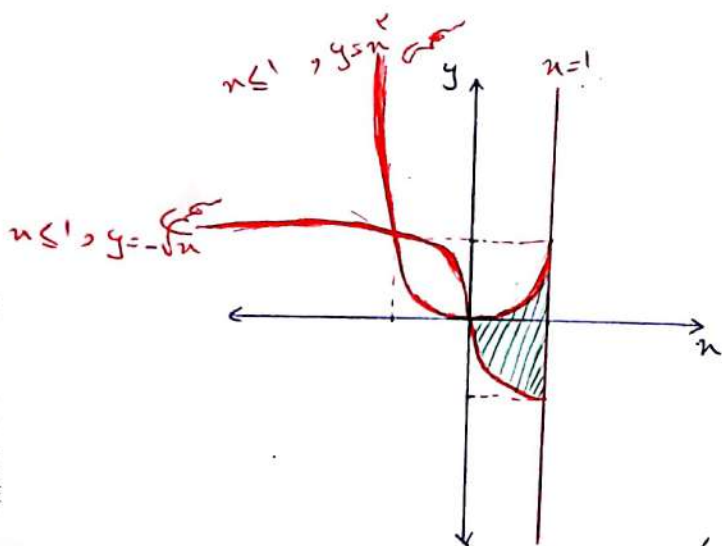
باتوجه به نامعادله زیر:

$$(y + \sqrt{n})(y - n^2) \sqrt{1-n} \leq 0$$

اگر حاصل برابر با صفر شود داریم:

$$\begin{cases} y + \sqrt{n} = 0 \Rightarrow y = -\sqrt{n} \\ y - n^2 = 0 \Rightarrow y = n^2 \\ 1 - n = 0 \Rightarrow n = 1 \end{cases}$$

از عبارت $\sqrt{1-n}$ می فهمیم $n \leq 1$ است (چون قرار است در دستا. محضات اعداد حقیقی نمایش داده شود پس در دو معادله $y = n^2$ و $y = -\sqrt{n}$ هم شرط $n \leq 1$ را داریم یعنی تنها باید تا عدد ۱ را نمایش دهیم.



از طرفی چون \sqrt{n} داریم پس $n \geq 0$ باید در نظر گرفته شود یعنی تنها در طرف راست دستا. محضات قسمتی که در شکل رنگ کرده ایم تمام جواب هایی موجود برای همان است که عبارت را ≤ 0 در نظر بگیریم (چون فقط ≤ 0 را نمایش می دهند پس مسافت نامحدود نیز رنگ برابر است باید خانه x_1 از صفحه که برابر ۱ می باشد.

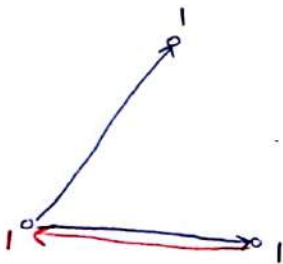


پاسخ بزرگ مرحله ی دوم المپیاد ریاضی فرمول وحدت ۲۰۱۸/۲۰۱۹

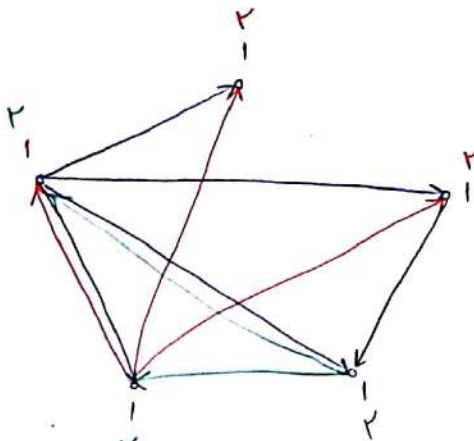
راه حل مساله ی ۴ :

اگر بخواهیم N عدد مختلف ببازیم باید بدانیم که هر شخصی هدایای خود را به $N-1$ نفر (همه به جز خودش) و حداقل به صفر نفر هدیه دهد. که این N عدد تفاوت همی اعداد هفتا $N-1$ هستند. یعنی مجموع همه هدایای رد و بدل شده برابر است با $\frac{(N-1) \times N}{2}$ که به هر شخصی در صورت امکان باید بپردازد. صورت سوال باید $\frac{(N-1) \times N}{2 \times N}$ هدیه تعلق گیرد که برابر است با $\frac{N-1}{2}$ یعنی تعداد هدایای هدیه ای که یک نفر دارد یعنی همان $N-1$ تقسیم بر ۲ که بدیهی است عددی صحیح باید باشد پس $N-1$ باید عددی زوج بود و N عددی فرد است. یعنی به ازای همه اعداد فرد بزرگتر از ۱ صورت مسئله امکان پذیر خواهد شد.

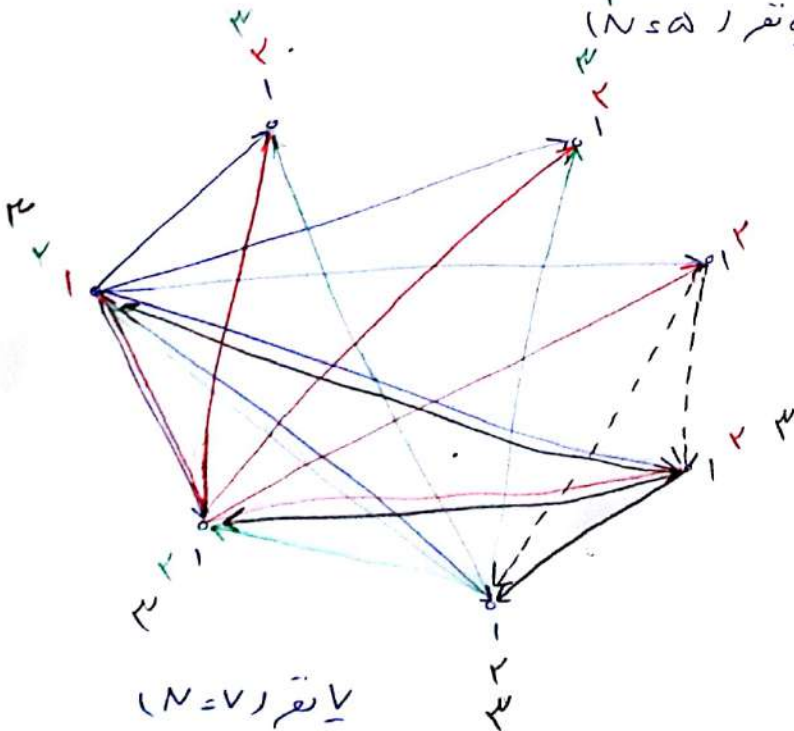
هند مثال :



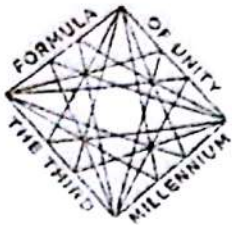
۲ نفر ($N=2$)



۵ نفر ($N=5$)



۷ نفر ($N=7$)



پاسخ بزرگ مرحله ی دوم المپیاد ریاضی فرمول وحدت ۲۰۱۸/۲۰۱۹

راه حل مساله ی ۵ :

داریم :

$$m^3 = n^3 + 13n - 27 \Rightarrow m^3 - n^3 = 13n - 27$$

تفاوت دو طرف

$$\Rightarrow (m-n)(m^2+mn+n^2) = 13n - 27 \Rightarrow (m-n)(m^2+mn+n^2) = 13(n-21)$$

آنرا $m = n+k$ داریم

$$(m-n)(m^2+mn+n^2) = 13(n-21)$$

$$(n+k-n)((n+k)^2+(n+k)n+n^2) = 13(n-21)$$

$$k(n^2+k^2+2nk+n^2+nk+n^2) = 13(n-21)$$

$$k(3n^2+k^2+3nk) = 13(n-21)$$

آنرا دو طرف معادله برابر با صفر باشند در این صورت $n=21$ و $k=0$ است که در واقع

$n=21$ و $m=21$ هر باشد از طرف هم می رانیم $n \geq 21$ است چون حاصل نمی تواند منفی باشد. معادله معادله ای درجه ۲ است. تکلیبات را ارائه می دهیم:

$$3n^2k + k^3 + 3nk^2 - 13n + 27 = 0$$

$$3k^2n + (3k^2 - 13)n + (27k + k^3) = 0$$

در این معادله Δ را به دست می آوریم:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (3k^2 - 13)^2 - 4 \times (3k)(27k + k^3)$$

$$= 9k^4 + 149 - 78k^2 - 4k^4 - 324k^2 = 5k^4 - 78k^2 - 324k + 149$$

که به ازای $k=1$ و همچنین $k > 1$ حاصل Δ منفی شده و در نتیجه ندارد اما در صورتی که $k=0$ باشد $n=21$ را داریم.

پس حاصل جمع n ها برابر 21 است.