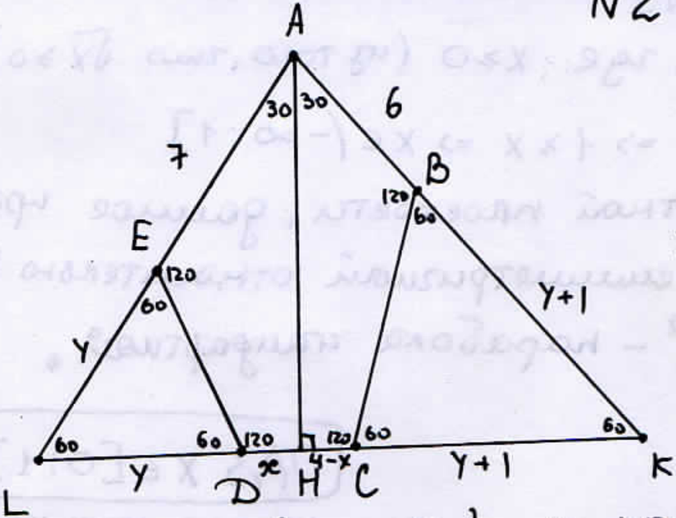
N2



Решение

1) $\sum$ углов $ABCDE = (5-3)\cdot 180^\circ = 540^\circ$

2) $\angle A = 60^\circ$; $\angle E = \angle D = \angle C = \angle B \Rightarrow$
$\Rightarrow 4\angle B + 60^\circ = 540^\circ \Rightarrow \angle B = 120^\circ \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle B = \angle C = \angle D = \angle E = 120^\circ$

3) Продолжим лучи AE и CD до (·) пересечения в точке L, и продолжим лучи AB и DC до (·) пересечения в точке K.

4) Проведем высоту AH в $\triangle ALK$, заметим что смежные углы с углами $\angle E$ и $\angle D = 60^\circ \Rightarrow \angle L = 60^\circ$ (из суммы углов), аналогично $\angle K = 60^\circ \Rightarrow \triangle ALK$ - равносторонний

5) Обозначим отрезок $DH = x$, тогда $HC = 4-x$. Обозначим отрезок $LD = y$, тогда $LE = LD = y$ (равностор)

6) Заметим, что $AL = AK$ (равностор) $\Rightarrow 7 + y = 6 + BK \Rightarrow$
$\Rightarrow BK = y+1 \Rightarrow BK = CK = y+1$ (равностор)

7) Т.к AH - высота в равностор $\triangle$, то AH биссектр $\Rightarrow \angle LAH = \angle HAK = 30^\circ$. Из того что в прямоугольных $\triangle LAH$ и $\triangle HAK$, есть $\angle 30^\circ$, ~~которые равен~~ катеты в 2 раза меньше гипотенузы $\Rightarrow$ можно сделать систему

$$\begin{cases} 2(x+y) = y+7 \\ 2(y+1+4-x) = y+7 \end{cases} \Leftrightarrow 2(x+y) = 2(y+1+4-x) \Leftrightarrow x+y = 5+y-x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x = 5 \Leftrightarrow x = \frac{5}{2} \Rightarrow 2\left(\frac{5}{2}+y\right) = y+7 \Leftrightarrow 5+2y = y+7 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = 2$$

8) Заметим, что из того что $y = 2$, а $x = \frac{5}{2} \Rightarrow$ что в $\triangle LAH$: $AL = 9$; $LH = \frac{9}{2}$

9) Из теоремы Пифагора $AH = \sqrt{81 - \frac{81}{4}} \Leftrightarrow AH = \sqrt{\frac{243}{4}} \Leftrightarrow$
$AH = \frac{9\sqrt{3}}{2}$

Ответ: $AH = \frac{9\sqrt{3}}{2}$

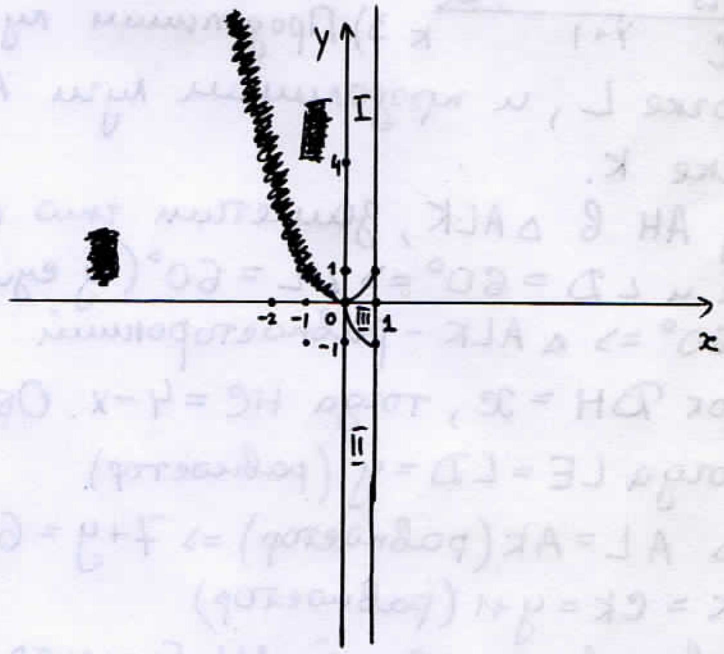
№3

$(y+\sqrt{x})(y-x^2)\sqrt{1-x} \le 0$, где $x \ge 0$ (из того, что $\sqrt{x} \ge 0$) - это ОДЗ

1) ОДЗ: $\sqrt{1-x} \ge 0 \Rightarrow 1-x \ge 0 \Rightarrow 1 \ge x \Rightarrow x \in (-\infty; 1]$

2) Изобразим, на координатной плоскости, данное произведение, где $-y=\sqrt{x}$ - это симметричный относительно Ox график корня $y=\sqrt{x}$, $y=x^2$ - парабола стандартная.

3) Получим:



$\boxed{\text{ОДЗ } x \in [0;1]}$

из того, что $x \ge 0$, $x \le 1$

4) Заметим, что плоскость с учетом ОДЗ, разбилась на 3 области (показанных на координатной прямой)

5) Подставим, любые значения из областей в выражение и найдём нужную область.

6) I область (·) $\left(\frac{1}{2}; 2\right)$:

$\underset{>0}{\left(2+\sqrt{\tfrac{1}{2}}\right)}\underset{>0}{\left(2-\left(\tfrac{1}{2}\right)^2\right)}\underset{>0}{\sqrt{1-\tfrac{1}{2}}} \le 0$, но !!!, т.к

$2+\sqrt{\frac{1}{2}}>0$; $2-\left(\frac{1}{2}\right)^2>0$; $\sqrt{1-\frac{1}{2}}>0$

II область (·) $\left(\frac{1}{2}; -2\right)$:

$\underset{<0}{\left(\sqrt{\tfrac{1}{2}}-2\right)}\underset{<0}{\left(\left(\tfrac{1}{2}\right)^2-2\right)}\underset{>0}{\sqrt{1-\tfrac{1}{2}}} \le 0$, но !!! т.к $\sqrt{\frac{1}{2}}-2<0$; $\left(\frac{1}{2}\right)^2-2<0$; $\sqrt{1-\frac{1}{2}}>0$.

III область (·) $\left(\frac{1}{2}; 0\right)$:

$\underset{>0}{\left(\sqrt{\tfrac{1}{2}}\right)}\cdot\underset{<0}{\left(0-\left(\tfrac{1}{2}\right)^2\right)}\underset{>0}{\sqrt{1-\tfrac{1}{2}}} \le 0$, верно $\Rightarrow$ только III область нам подходит.

7) Найдем её площадь: Заметим, что если симметрично, а потом зеркально (относительно себя) ото-

бразить нашу маленькую часть параболы относительно оси Ox, то мы получим её же => площадь данной фигуры есть ничто иное как площадь квадрата 1×1 => => площадь III области = 1.

Ответ: 1.

N4

Оценка

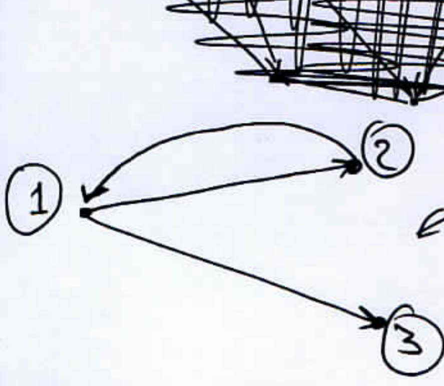
Заметим, что если кто-то из детей подарит ≥ N подарков, то это невозможно. И в самом деле если кто-то из детей подарит ≥ N подарок, то по принципу Дирихле найдётся один (кроме него самого) человек, которому он подарит хотя бы 2 подарка!!! => каждый из N человек подарил разное кол-во подарков из набора чисел от 0 до N−1 => этот набор единственный и каждый из N человек подарил равно по одному кол-ву подарков из данного набора. (т.к в наборе N чисел) поэтому единств.

Допустим что N−четное число, тогда из вышесказанного $\Sigma_{\text{количества подарков}} = 0+1+2+\ldots+(N-2)+(N-1) = \frac{(N-1)N}{2}$.
Заметим, что если N−четное число, то каждый получил $\frac{(N-1)N}{2N} = \frac{(N-1)}{2}$ (подарок), но N−1 − нечетное $\Rightarrow \frac{N-1}{2} \notin \mathbb{Z}$!!! => при четных N − это невозможно. => Это возможно только при N−нечетном. Приведем пример для всех N−нечетных.

Пример

Каждый из N−человек, получит $\frac{N-1}{2}$ подаров, а подарит от 0 до N−1 подарок.

Пример для 3-х:



пример для 3-х, а дальше рекурсивно можно вывести для всех нечетных

№1

Ответ: $2+8\cdot 6+7\cdot 12+6\cdot 18+5\cdot 24+4\cdot 41+3\cdot 30+2\cdot 18+6=$
$=658.$

Сначала считаем относительно каждого ромбика, до того момента, пока не встретим такой же ромб. Дойдя до треугольников считаем относительно каждого треугольника, пока не встретим такой же треугольник (под „таким же" треугольником или ромбом я подразумеваю тот же ромб от которого мы потом будем так же считать)

№5

$n^3+13n-273=m^3$, Заметим, что $273=7\cdot 13\cdot 3$

Отсюда: $n^3+13n-273 \underset{7}{\equiv} m^3 \Rightarrow n^3-n \underset{7}{\equiv} m^3$ Св-во 1

$n^3+13n-273 \underset{13}{\equiv} m^3 \Rightarrow n^3 \underset{13}{\equiv} m^3$ Св-во 2

$n^3+13n-273 \underset{3}{\equiv} m^3 \Rightarrow n^3+n \underset{3}{\equiv} m^3$ Св-во 3

Можно разложить на множители:

$(m-n)(m^2+mn+n^2)=13(n-21)$!!!

Проанализировав числа я понял, что под св-во 1, св-во 2, и св-во 3, подходит число 8.

Ответ: 8.