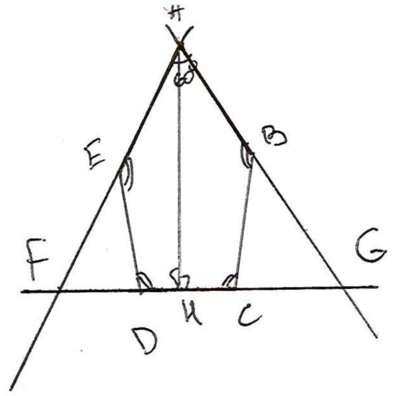
№2



Дано: $ABCDE$ - выпуклый
$\angle A = 60^\circ$
$\angle B = \angle C = \angle D = \angle E$
$AB = 6,\quad CD = 4,\quad EA = 7$
Найти: AH

Решение

$ABCDE$ - выпуклый

$\Rightarrow \angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E = 540^\circ \Rightarrow \angle A + \angle C + \angle D + \angle E = 480^\circ$

т.к. $\angle B = \angle C = \angle D = \angle E \Rightarrow \angle B = \angle C = \angle D = \angle E = 120^\circ$

Пусть $AE \cap DC =$ т F
и
$AB \cap DC =$ т G

$\angle ABC$ и $\angle GBC$ - смежные $\Rightarrow \angle GBC = 180^\circ - \angle CBA = 60^\circ$
$\angle GCB$ и $\angle DCB$ - смежные $\Rightarrow \angle GCB = 180^\circ - \angle DCB = 60^\circ$
$\Rightarrow \angle G = 60^\circ$ (т.к. $\angle GBC + \angle BCG + \angle G = 180$)

$\Rightarrow \triangle BCG$ - равносторонний $\Rightarrow BG = CG = BC$

$\angle FED$ и $\angle AED$ - смежные $\Rightarrow \angle FED = 180^\circ - \angle AED = 60^\circ$
$\angle FDE$ и $\angle EDC$ - смежные $\Rightarrow \angle FDE = 180^\circ - \angle CDE = 60^\circ$
$\Rightarrow \angle F = 60^\circ$ (т.к. $\angle FED + \angle FDE + \angle F = 180^\circ$)

$\Rightarrow \triangle FED$ - равносторонний $\Rightarrow FE = FD = ED$

$\left.\begin{array}{l}\angle F = 60^\circ \\ \angle G = 60^\circ \\ \angle A = 60^\circ\end{array}\right\}$ $\triangle AFG$ - равносторонний $\Rightarrow AF = AG = FG \quad \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad AE + FE = AB + GB = FD + DC + CG$

$\underbrace{7 + FE = 6 + GB}_{\Downarrow} = FE + 4 + GB$

$GB = FE + 1 \Rightarrow 7 + F\cancel{E} = FE + 4 + \cancel{FE} + 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow FE = 2 \Rightarrow AF = 9 = AG = FG$

$S_{\triangle}AFG = \frac{1}{2} AH \cdot FG = 4{,}5 \cdot AH$

$\parallel$

$S_{\triangle}AFG = \frac{1}{2} \cdot AF \cdot AG \cdot \sin 60^\circ = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 9 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4{,}5 \cdot 4{,}5\sqrt{3}$

$\Updownarrow$

$\cancel{4{,}5} AH = \cancel{4{,}5} \cdot 4{,}5 \cdot \sqrt{3}$

$AH = 4{,}5 \cdot \sqrt{3}$

Ответ: $4{,}5\sqrt{3}$

№4

Каждый ребенок подарил не более, чем $N-1$ подарков, т.к. если какой-то ребенок подарил хотя бы N подарков, то найдется ребенок, которому первый подарил хотя бы 2 подарка, что противоречит условию

И т.к. каждый ребенок подарил различное число подарков, то ~~ребята~~ дети дарили подарки от 0 до $N-1$ штук

Всего было подарено $\frac{(N-1) \cdot N}{2}$ подарков $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ т.к. по условию все получили одинаковое число подарков, то каждый получил по $\frac{(N-1) \cdot N}{2} : N = \frac{N-1}{2}$ подарков

$\frac{N-1}{2}$ - целое $\Rightarrow$ $N-1 \vdots 2 \Rightarrow$ N-нечетное $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Только при нечетном N

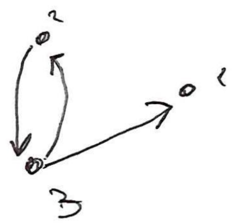
Докажем индукцией по N, что для любого N-нечетного можно получить пример, подходящий по условию

$\exists$ вершины - это дети

А если ребро направлено от 1 ребенка ко 2, то 1 ребенок подарил подарок 2

База:

$N=3$:



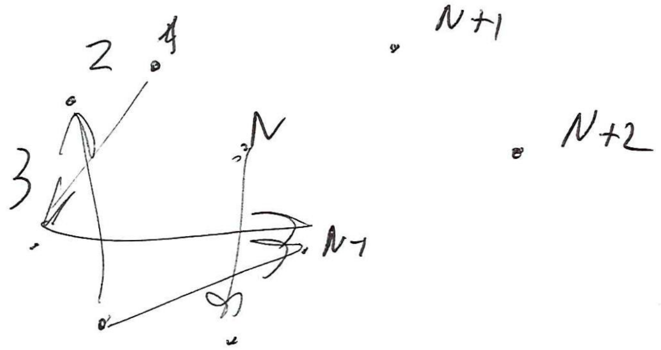
У каждого по 1 подарку

1 ребенок подарил 0 подарков

2 ребенок – 1 подарок

3 ребенок – 2 подарка

Переход: $N \to N+2$



Пронумеруем вершины от 1 до $N+2$

По предположению индукции у детей с номером от 1 до N поровну подарков (а именно $\frac{N-1}{2}$) и все они подарили различное число подарков

] дети с номерами от 1 до $\frac{N-1}{2}$ подарят по одному подарку ребенку с номером $N+1$ $\Rightarrow$ у ребенка с номером $N+1$ будет $\frac{N-1}{2}$ подарков

] дети с номерами от $\frac{N-1}{2}+1$ до N подарят по одному подарку ребенку с номерам $N+2$ $\Rightarrow$ у ребенка с номером $N+2$ будет $\frac{N-1}{2}+1$ подарок

] ребенок с номерам $N+2$ подарит подарки всем $\to$

$\Rightarrow$ у детей с 1 по N станет $\frac{N-1}{2}+1$ подарок, у $N+1$ будет $\frac{N-1}{2}+1$ подарок и у ребенка $N+2$ будет $\frac{N-1}{2}+1$ подарков

$N+1$-й ребенок подарил 0 подарков

дети с 1 по N стали дарить от 1 до N подарков,
т.к. каждой подарил еще по 1 подарку.
$N+2$-й ребенок подарил $N+1$ подарков

⇓

каждой подарил различное число подарков
и
У каждого ребенка по $\frac{N-1}{2}+1$ подарков => подходит по усл.

№ 3

$(y+\sqrt{x})(y-x^2)\sqrt{1-x} \le 0$ ООФ: $\begin{cases} x \le 1 \\ x \ge 0 \end{cases}$

1) $x=1$:
$(y+1)(y-1)\cdot 0 = 0$ - подходит -

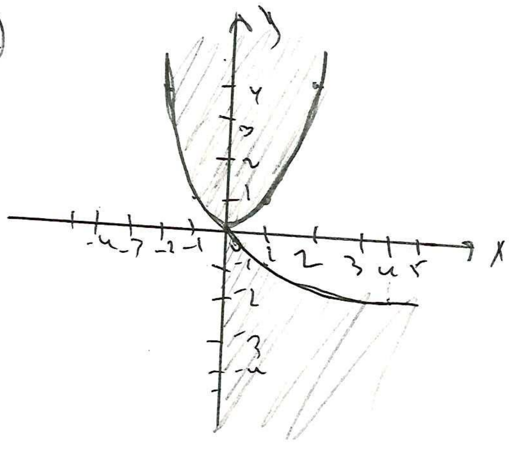
2) $x<1$:
$(y+\sqrt{x})(y-x^2)\underbrace{\sqrt{1-x}}_{>0} \le 0$

$(y+\sqrt{x})(y-x^2) \le 0$

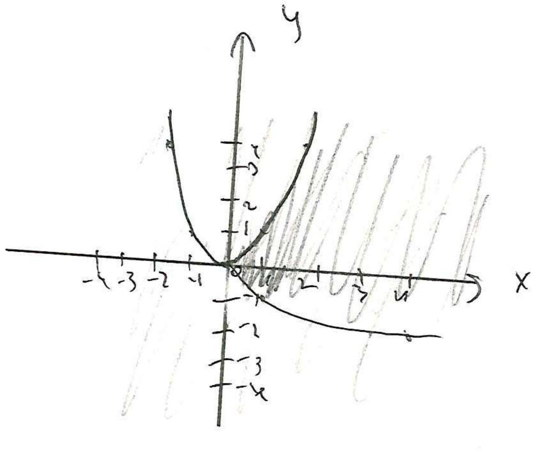
$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y+\sqrt{x} \le 0 \\ y-x^2 \ge 0 \end{cases} (1) \\ \begin{cases} y+\sqrt{x} \ge 0 \\ y-x^2 \le 0 \end{cases} (2) \end{array}\right.$

Построим $y=-\sqrt{x}$ и $y=x^2$ в одной системе координат

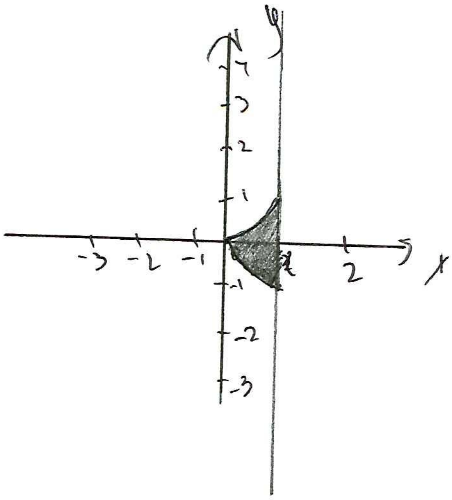
(1)



(2)



В итоге получили:



Получили, что площадь множества точек равна 1

Ответ: 1

№5

$\exists\ n^3+13n-273 = x^3$

1) $n=21$: $21^3+273-273=21^3$ – куб

2) $n>21$:

Если $n>21$, тогда $13n-273>0 \Rightarrow x^3>n^3$

Тогда $n^3+13n-273 \geq (n+1)^3$

$\cancel{n^3}+13n-273 \geq \cancel{n^3}+3n^2+3n+1$

$3n^2-10n+274\leq 0$

$3n^2-10n+274=0$

$D=100-4\cdot 3\cdot 274<0 \Rightarrow$ действ. корней нет.

$\Downarrow$

$3n^2-10n+274>0$

$\Downarrow$

решения нет

3) $n<21$:

Если $n<21$, тогда $13n-273<0 \Rightarrow n^3>x^3$

Тогда ~~$n^3+13n-273 \geq (n-1)^3$~~ $n^3+13n-273\leq(n-1)^3$

~~$n^3+13n-273 \geq n^3-3n^2+3n-1$~~ $\cancel{n^3}+13n-273\leq\cancel{n^3}-3n^2+3n-1$

~~$3n^2+10n-272\geq 0$~~ $3n^2+10n-272\leq 0$