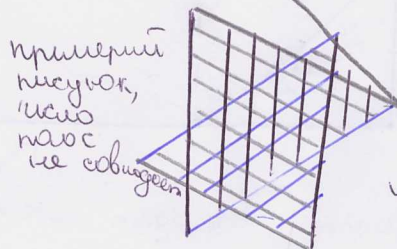


Шифр M-006

1	2	3	4	5	Итого

№1

У нас есть 3 группы полос, что в каждой группе все прямые параллельны:

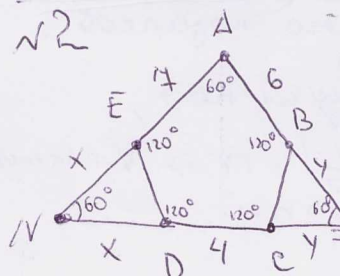


Чёрные, синие, серые. Любой треугольник состоит из 3 непараллельных линий, а у нас ~~всего~~ всего 3 вида непараллельных прямых, значит в любой 3-галке $\{1\text{-синя, } 1\text{-серая, } 1\text{-чёрная}\}$.

Теперь докажем, что любые 3 прямые такого вида образуют ровно 1 треугольник. Три прямые не могут образовывать ≥ 2 треугольников, значит их ≤ 1 . Все наши прямые (взяв в построение) непараллельны, и значит пересекутся, нетрудно заметить что пересечение всех таких прямых есть на рисунке.

Значит ответ равен кол-ву выбрать 3 разное цвета прямые. Нетрудно посчитать, что прямых каждого цвета 9, значит $\text{Ответ: } 9 \cdot 9 \cdot 9 = 9^3$

№2



Сумма углов 5-угольника $= 180(n-2) = 180 \cdot 3 = 60 \cdot 9$

Один угол $= 60$, значит на остальные углы $60 \cdot 9 - 60 = 60 \cdot 8$, и $\frac{60 \cdot 8}{4} = 60 \cdot 2 = 120^\circ$. Тогда как на рисунке

проделим стороны до пересечения в точках M и N.

$\angle CBM = 180 - 120 = 60^\circ$, $\angle BCM = 180 - 120 = 60^\circ \Rightarrow \angle M = 60^\circ$, аналогично

$\angle C = 60^\circ \Rightarrow \triangle NAM$ - равносторонний $\Rightarrow$ если $ND = x$, $CM = y$

$$\begin{aligned} \text{то } x + 4 &= y + 6 = 4 + x + y & y + 6 &= 4 + x + y & x &= 2 \\ x + 4 &= 4 + y + y & x + 4 &= 4 + y + y & y &= 3, \end{aligned}$$

тогда у нас проведена высота в равностороннем $\triangle$ со стороной $4 + x = 4 + 2 = 6$. Тогда высота $= 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \underline{\underline{3\sqrt{3}}}$

$$\sqrt{1-x} \Rightarrow x \leq 1$$

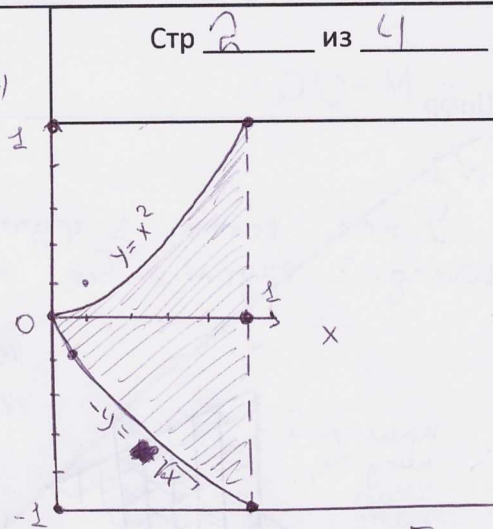
$$y-x^2 \text{ или } y+\sqrt{x} \text{ меньше или } = 0.$$

меньше 0 из них может быть только 1, ведь их произведение ≤ 0 , но $y-x^2 \leq y+\sqrt{x}$ из этого следует $-y \leq \sqrt{x}$ и $y \leq x^2$.

Возьмём произвольное x от 0 до 1 и рассмотрим всевозможное y , $-\sqrt{x} \leq y \leq x^2$, $\sqrt{1-x}$ будет существовать и будет ≥ 0 ,

$y-x^2$ будет ≤ 0 , $y+\sqrt{x}$ будет ≥ 0 , и значит

в их произведении ≤ 0 , то есть все y подошли, теперь наметим график для $0 \leq x \leq 1$, где $-\sqrt{x} \leq y \leq x^2$, это и будет множество точек на плоскости удовлетворяющее условию. Оно будет выглядеть так.



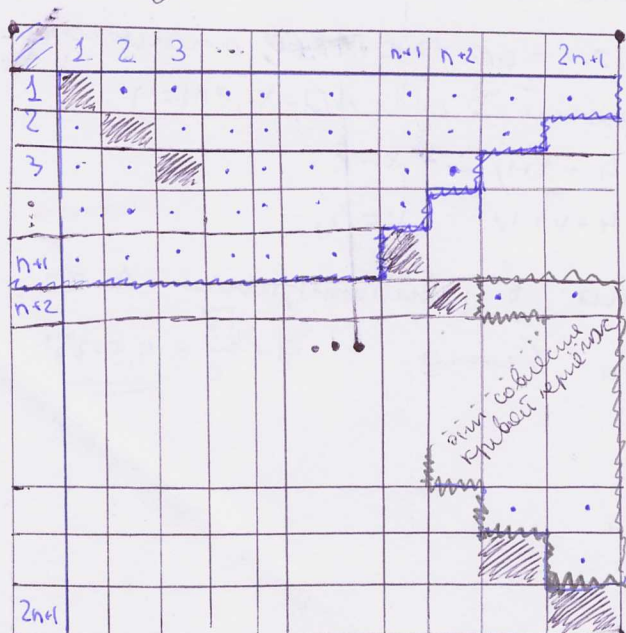
В верхней половине ограничивает часть параболы от 0 до 1, а снизу, если повернуть её на 90° против часовой стрелки, получим тоже часть параболы от 0 до 1, но зато кривая которая дополняет первую до квадрата 1×1 , и значит и площадь совпадёт с площадью квадрата 1×1 , а она $= 1$.

№4 Поймём, что никто не мог сделать $\geq N$ подарков, ведь он может сделать подарок только $N-1$ человеку, и каждому ≤ 1 . От 0 до $N-1$ ровно N возможных чисел, а т.к. никто не может подарить ≤ 0 или $N-1$, а все N человек подарком разное кол-во, то среди подарков 0, второй 1 и так далее N -ый $N-1$. Тогда всего подарков

$$\frac{N(N-1)}{2}$$

с другой стороны пусть каждый получит по n , тогда подарков Nn , $\frac{N(N-1)}{2} = Nn$ $\frac{N-1}{2} = n \Rightarrow N$ - нечётное.

Пример для произвольного нечётного N : $N=2n+1$

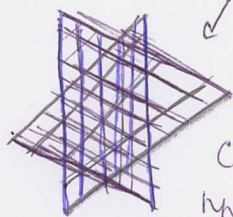


Если в клетке на пересечении столбца x и строки y стоит точка, это значит ребёнок под номером y подарил ребёнку с номером x . - самому себе дарить нельзя.

Упорядочим детей так, что 1 подарит больше всех, 2 меньше на 1, и последний 0. Тогда ребёнок с номером x подарит $2n+1-x$ подарков. Первый подарит всем кому мог, второй всем кому мог кроме последнего третьего кроме последнего 2, ..., $n+1$ всем кому мог кроме n последнего. Эта группа выделена розовым. $n+2$ всем кому мог кроме первых $n+1$, $n+3$ всем кому мог кроме первых $2n$, группа выделена синим. Тогда из последних n подарит $n-1$ из себя и 4 подарка, Ответ: $N=2n+1$.

последний всем кому мог кроме первых $n+1$ подарит $n+1-n=n$, а самому x из себя, тоже n , т.е. n .

№1 Разделим все прямые на 3 группы параллельных. примерный рисунок. Это горизонт, вертикаль и диагональ.

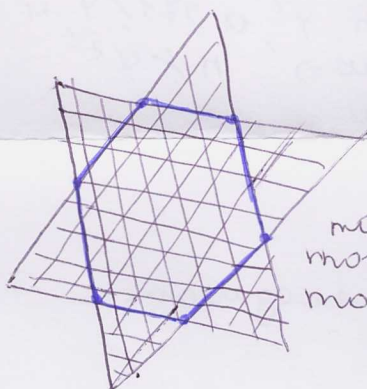


Любой треугольник будет образован 3 различными цветами. Посмотрим

сколько для нас можем выбрать 3 различных прямых. Нетрудно посчитать, что

каждого цвета у нас 9 прямых, выбрать 1-9 вариантов, 2-9 и 3-9, итого 9^3 . Теперь посмотрим сколько

из них не будут треугольниками. Когда 3 непараллельные прямые не будут образовывать треугольник, либо у нас не отмечена ни одна точка пересечения (какая-то из 3), либо у нас отмечены все точки, либо эти 3 прямые пересекаются в 1 точке. Посмотрим сколько точек.



Они будут находиться на границах и внутри этого шестиугольника. Точка вне него образована пересечением 2 прямых, а внутри и на нем 3, значит

точка конструций столько же, сколько точек в шестиугольнике, если посчитать, то мы получим 61. Тогда ответ $9^3 - 61$.

№5 $n=21$ подходит и единственно

$$21^3 + 13 \cdot 21 + 243 = 21^3$$

~~Ответ 21~~ посмотрим по mod 4.

Какие остатки дают кубы по mod 4.

$$1^3 = 1^3 \equiv 1$$

либо -1, 0, 1.

$$2^3 = 8 \equiv 0$$

$$3^3 = 27 \equiv -1$$

$$4^3 = (-3)^3 \equiv -1$$

$$5^3 = (-2)^3 \equiv -8$$

$$6^3 = (-1)^3 \equiv -1$$

$$0 \equiv 0$$

$$n^3 - 13n - 243 \equiv x^3$$

$$n^3 + n \equiv x^3$$

$$1) n \equiv 0$$

$$2) n^3 + n \equiv 1$$

$$n(n^2 + 1) \equiv 1$$

$$2 \equiv 1 \cdot 2 \text{ не делит}$$

$$n(n^2+1)$$

$$10 \equiv 2 \cdot (4+1) \text{ не делит}$$

$$2 \equiv 3 \cdot (9+1) \text{ не делит}$$

$$12 \equiv 4 \cdot (16+1) \text{ не делит}$$

$$4 \equiv 5 \cdot (25+1) \text{ не делит}$$

$$12 \equiv 6 \cdot (36+1) \text{ не делит, невозможно.}$$

$$3) \quad n(n^2+1) \equiv -1$$

$\nmid$, но посмотрев на варианты сверху
мы можем получить $\text{не делит} \Rightarrow n \nmid 7$

$\Downarrow$

$$n^3 + 13n - 243 \nmid 7, \text{ то н.к.} = x^3, \text{ то}$$

$$n^3 + 13n - 243 \nmid 7^3 \quad n^3 \nmid 7^3$$

$$13n - 243 \nmid 7^3, \text{ если } n \nmid 7^2, \text{ то } 13n \nmid 7^2, \text{ а } 243 \nmid 7^2, \text{ и}$$

$$13(n-21) \nmid 7^3$$

$$n-21 \nmid 7^3$$

$$n \equiv 21 \pmod{7^3}, \text{ тогда } n = (7^3x + 21) \text{ не подходит}$$