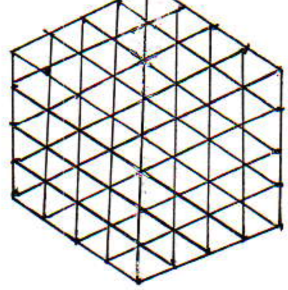
№1

Сначало посчитаем количество треугольников, находящихся внутри шестиугольника, образованого пересечением треугольников.

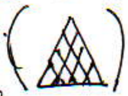


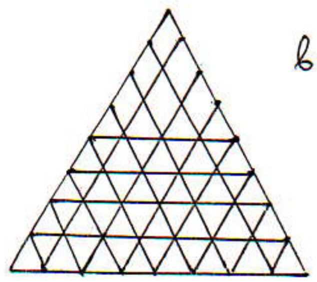
Заметим, что Δ делится на $\triangleleft$ и $\triangleright$, причем, их одинаковое количество.
Всего количеств каждого из таких видов Δ можно посчитать взяв каждый столбец (вертекальную линию в ⬡), посчитать сколько на ней возможно взять вершин Δ, после чего умножить на количество возможных основаниий; после чего просуммировать все получившиеся значения каждого из видов Δ:

$5\cdot8+6\cdot7+7\cdot6+8\cdot5+9\cdot4+8\cdot3+7\cdot2+6\cdot1 = 40+42+42+40+36+24+14+6$

$= 244$

Всего Δ: $2\cdot244 = 488$.

Теперь поделим данную фигуру на 6 таких треугольников, и посчитаем сколько Δ находящихся в ниб, и имеющих вершину в верхнем Δ: (); у всех них возможно всего 5 вариантов основании:



$5\cdot(1+2+3+4) = 50$; Таких всего 6 ⇒

Всего в них Δ: $6\cdot50 = 300$

И наконец подсчитаем сколько Δ имеющих все три вершины за пределами шестиугольника (В больших Δ одинаковое количество таких Δ, ч они не пересекаются, не имеют общих):

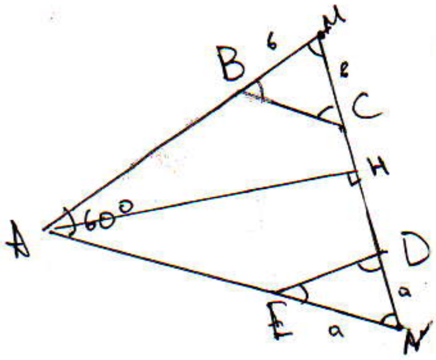
$2\cdot4\cdot(1+2+3+4) = 80$

Всего Δ: $80+300+488 = 868$

Ответ: 868.

№2

Решение:



Продлим AB и CD до пересечения — точка M.

Продлим AE и CD до пересечения — точка N

Дано:

$\angle A = 60^\circ$

$\angle B = \angle C = \angle D = \angle E = 120^\circ$

$AB = 6$

$CD = 4$

$EA = 7$

$AH \perp CD$

$AH = ?$

$\angle AED = 120^\circ \Rightarrow \angle DEN = 60^\circ$

$\angle EDC = 120^\circ \Rightarrow \angle EDN = 60^\circ$ | $\Rightarrow$

$\triangle NED$ — равносторонний $\Rightarrow$

$ED = EN = ND = a \Rightarrow \angle END = 60^\circ$

$\angle ABC = 120^\circ \Rightarrow \angle MBC = 60^\circ$

$\angle BCD = 120^\circ \Rightarrow \angle BCM = 60^\circ$ | $\Rightarrow$

$\triangle BMC$ — равносторонний $\Rightarrow$

$BM = MC = BC = b$; $\angle BMC = 60^\circ$

$\angle BAE = 60^\circ$ и $\angle AND = 60^\circ \Rightarrow \triangle AMN$ — равносторонний $\Rightarrow$

$AM = MN = AN$

$$\begin{cases} AB + b = b + CD + a \\ AE + a = a + CD + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = AB - CD \\ b = AE - CD \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases} \Rightarrow$$

$AM = MN = AN = AE + a = 9$

AH — высота в равностороннем $\triangle$ со стороной 9; $\Rightarrow$

CH — медиана $\Rightarrow HN = 4,5 \Rightarrow$

$AH = \sqrt{AN^2 - NH^2} = \sqrt{81 - 20,25} = \sqrt{60,75}$.

Ответ: $AH = \sqrt{60,75}$.

№3

$(y+\sqrt{x})(y-x^2)\sqrt{1-x} \le 0.$

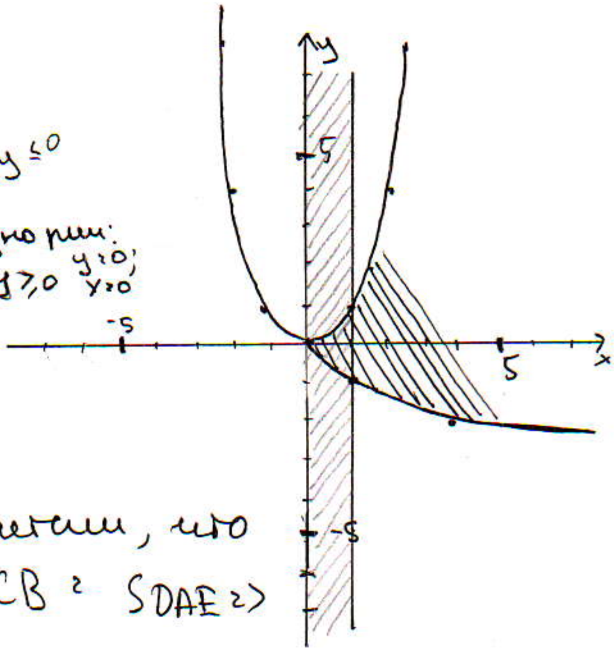
$\sqrt{1-x}$ всегда ≥ 0; $x \le 1$; =>

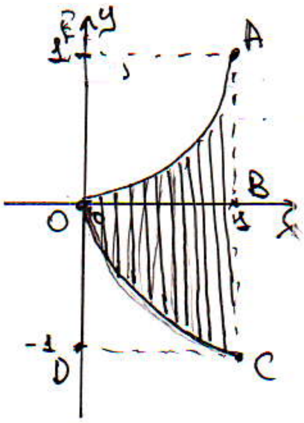
При $x \ne 1$ (1 - всегда решение неравенства):

$\begin{cases}(y+\sqrt{x})(y-x^2) \le 0 \\ x \le 1,\ x \geq 0\end{cases}$ =>

$\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}\begin{cases}y+\sqrt{x} \geq 0 \\ y-x^2 \le 0\end{cases} \\ \begin{cases}y+\sqrt{x} \le 0 \\ y-x^2 \geq 0\end{cases}\end{array}\right. \\ x \geq 0 \\ x \le 1\end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}\begin{cases}y \geq -\sqrt{x} \\ y \le x^2\end{cases} \\ \begin{cases}y \le -\sqrt{x}, => y \le 0 \\ y \geq x^2, => y \geq 0\end{cases}\end{array}\right. \\ x \geq 0 \\ x \le 1\end{array}\right.$

одно реш: $y=0$; $x=0$





Заметим, что

$S_{OCB} = S_{DAE}$ =>

$S_{OCA} = S_{OBDE} =$

$= 1 \times 1 = 1.$

Ответ: 1.

№4

Так как один другому не мог подарить больше одного подарка, то каждый подарил не больше, чем $n-1$ подарков. Всего n человек => n количеств подарков; все подарили разное число подарков =>

первый подарил 0; второй 1 .... последний $n-1$. =>
(расставим в порядке возр. кол. подаренных подарков)

В общем подарков подарили:

$\underbrace{1+2+3+\ldots+n-1}_{n-1} = \frac{(n-1+1)(n-1)}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$,

Всего подарков все получили одинаковое количество =>

$\frac{n(n-1)}{2}$ должно быть кратно n; это возможно только в том случае если $n-1 \vdots 2$; иначе $n \vdots 2$; $n-1 \not\vdots 2$ =>

$\frac{n}{2}(n-1) \not\vdots n$; т.к. $\frac{n}{2} \not\vdots n$ а $n-1$ и n не имеют общих делителей.

При всех n - нечетных - это возможно:

Второй подарит 1-му; n-ный всем кроме 1;
Третий 1му и 2му; n-1ый всем кроме 1го и 2го....
Это возможно т.к. дарящих подарки — четное число.

Ответ: При всех нечетных n, больших 1.

№5.

Пусть n - кубоватое; Тогда

$n^3+13n-273 = b^3 = (n+a)^3$ a - целое.

$n^3+13n-273 = n^3+3n^2a+3na^2+a^3$

$13(n-21) = a(3n^2+3na+a^2)$.

Так, как $n^3+13n-273>0$
$n^3+13n>273$
$n>5;\ n\geq 6$.

Рассмотрим $3n^2+3na+a^2$:

$D = 9a^2-3\cdot 4a^2 = -4a^2;\ a^2\geq 0 =>$

При $a\neq 0$ $3n^2+3na+a^2>0$

При $a\neq 0$

$13(n-21)=0$.
$n-21=0$
$n=21;$ => $21^3+13(21-21)=21^3$ => 21 - кубоватое число.

Рассмотрим $n\in[6;20]$; =>

$n-21<0;$ => $a<0$ (т.к $3n^2+3na+a^2>0$);

~~$-(n-21) \leq 3n^2+3na+a^2$ ($n\geq 6$ => $3n^2\geq 3\cdot 36$~~

При $n\in[22;+\infty)$;

$n-21>0$ => $a>0$.

$n-21<3n^2+3na+a^2$ => $a<13$ =>

$3n^2+3na+a^2 \vdots 13$;

$13(n-21)\geq 3n^2+3na+a^2$ (т.к. $13(n-21)=a(3n^2+3na+a^2)$)
$a\geq 1$.

$3n^2+n(3a-13)+a^2+273\leq 0$.

$D=(3a-13)^2-4\cdot 3(a^2+273)=9a^2-78a+169-12a^2-3276=$

$=-(3a^2+78a+3107)$; т.к $a>0$ => $D<0$ =>

$13(n-21)\geq 3n^2+3na+a^2$ - не имеет решений =>

кубоватых $n > 21$ – несуществует;

При $n \in [6; 20]$; $273 = 13 \cdot 3 \cdot 7 \Rightarrow$

6: $3^3 \cdot 2^3 + 3(26 + 13 \cdot 7) = 3(3^2 \cdot 2^3 + 13(9)) = 3^3(2^3 + 13) = 3^3 \cdot 22$ – нет

7: $7^3 + 7(13 + 13 \cdot 3) = 7(7^2 + 13 \cdot 4) \Rightarrow 7^2 + 13 \cdot 4 \not\vdots 7 \Rightarrow$ нет.

8: $8^3 + 13 \cdot 8 - 273 =$

9: $9^3 + 13(3 - 21) = 9(9^2 - 1 \cdot) = \vdots 9; \not\vdots 27$ – нет.

10: $1000 + 130 - 273 = 857$ – нет $(> 9^3)$.

11: $11^3 + 13(11 - 21) = 11^3 - 130$; $11^3 - 130 > 10^3 \Rightarrow$ нет.

12: $3^3 \cdot 4^3 + 13(12 - 21) = 3(3^2 \cdot 4^3 + 13(-3)) = 9(3 \cdot 4^3 - 13) \vdots 9$, но $\not\vdots 27$.

13: $13^3 + 13(13 - 21) = 13(13^2 - 8)$ – нет $\vdots 13; \not\vdots 13^2$.

14: $14^3 + 13 \cdot 7(2 - 3) = 7(2 \cdot 14^2 - 13) \vdots 7; \not\vdots 49 \Rightarrow$ нет.

15: $15^3 + 13(15 - 21) = 3(5 \cdot 15^2 - 13 \cdot 2) \vdots 3; \not\vdots 9$ – нет.

16: $16^3 + 13(16 - 21) = 16^3 - 4 \cdot 13 > 15^3 \Rightarrow$ нет

17: $17^3 + 13(-4) > 16^3 \Rightarrow$ нет.

18: $18^3 + 13 \cdot (-3) = 3(6 \cdot 18^2 - 13) \vdots 3; \not\vdots 9 \Rightarrow$ нет.

19: $19^3 - 13 \cdot 2 > 18^3 \Rightarrow$ нет.

20: $20^3 + 13(-1) = 20^3 - 13 > 19^3 \Rightarrow$ нет.

Существует всего одно кубоватое число – 21.

Ответ: 21.