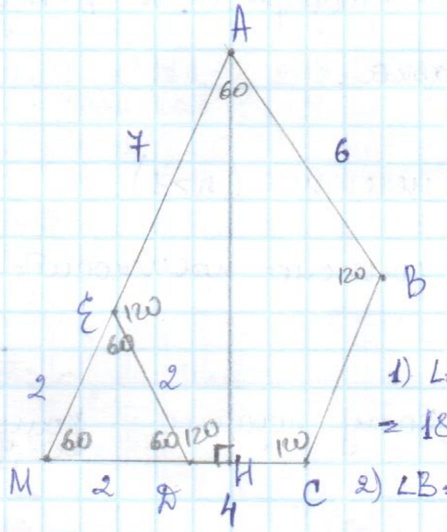
№2.



Дано: $\angle A = 60°$

$AB = 6$; $\angle B = \angle C = \angle D = \angle E$.

$CD = 4$

$AE = 7$.

Найти: AH.

Решение:

1) $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E = 180(5-2) = 540°$

2) $\angle B = \angle C = \angle D = \angle E = \dfrac{540-60}{4} = 120°$

$\angle A + \angle B = 180° \Rightarrow AE \parallel BC$.

$\angle A + \angle E = 180° \Rightarrow AB \parallel DE$.

3) Доп. построение: $AE \cap CD = M$.

$\angle MED = 60°$, $\angle MDE = 60° \Rightarrow \angle EMD = 60°$

$\Rightarrow \triangle MED$ – равносторонний, $ABCM$ – равнобедренная трапеция.

$CM = 6$, $DM = DE = ME = 2$, $AM = 9$.

4) $\triangle AMH$ – прямоугольный, $AH = AM \sin 60 = \dfrac{9\sqrt{3}}{2}$.

№4.

n $(n > 1)$ детей. Тогда пусть

0-й ребенок подарил 0 подарков,

1-ый ребенок подарил 1 подарок,

. . .

$(n-1)$-ый ребенок подарил $(n-1)$ подарок.

Всего детьми было подарено $0+1+2+\ldots(n-1) =$

$= \frac{(0+n-1)n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ подарков, и каждый получит по $\frac{(n-1)}{2}$ подарка.

$\frac{(n-1)}{2} \in \mathbb{Z} \Rightarrow n$ – нечетное $(n>1)$.

Покажем, как должно происходить дарение подарков:

Кто подарил	Кому подарил	Количество подарков у каждого.
0-ой		0
$(n-1)$-ый	0; 1; 2; 3; …$(n-2)$-ому	У всех, кроме $(n-1)$-ого по 1 подарку.
1-ый	$(n-1)$-ому	У всех по 1 подарку!
$(n-2)$-ой	0; 1; 2; 3; …$(n-3)$-ему	У всех, кроме $(n-1)$ого, $(n-2)$-ого по 2 подарка
2-ой	$(n-1)$-ому; $(n-2)$-ому.	У всех по 2 подарка.
$(n-3)$-ий ~~3-ий~~	0; 1; 2; 3; …$(n-4)$-ому	У всех, кроме $(n-1)$, $(n-2)$, $(n-3)$ по 3 подарка
3-ий	$(n-1)$, $(n-2)$, $(n-3)$-ему	У всех по 3 подарка.

. . . .

Так как n нечетное, то без 0-ого, который никому не дарит, количество детей будет четное, ~~[illegible]~~ и поэтому в результате описанного выше способа дарения, у каждого получится одинаковое количество подарков $\frac{(n-1)}{2}$.

Ответ: возможно при нечетных $n>1$.

№ 3.

$(y+\sqrt{x})(y-x^2)\sqrt{1-x} \leq 0.$

Так как $\sqrt{1-x} \geq 0$ для любого $x \leq 1$, то

$\begin{cases} (y+\sqrt{x})(y-x^2) \leq 0; \\ 1-x \geq 0; \end{cases}$ $\begin{cases} (y+\sqrt{x})(y-x^2) \leq 0; \\ x \leq 1; \end{cases}$

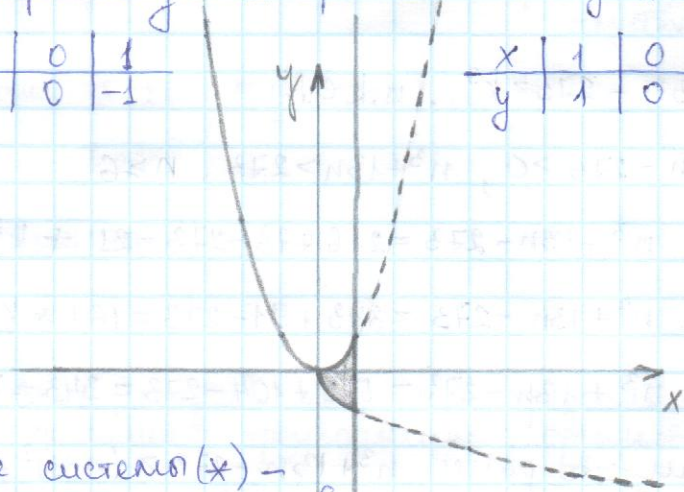
$\begin{cases} y+\sqrt{x} \leq 0, \\ y-x^2 \geq 0, \\ x \leq 1; \end{cases}$ или $\begin{cases} y+\sqrt{x} \geq 0, \\ y-x^2 \leq 0, \\ x \leq 1; \end{cases}$

$\begin{cases} y \leq -\sqrt{x}, \\ y \geq x^2, \\ x \leq 1. \end{cases}$ (*) или $\begin{cases} y \geq -\sqrt{x}, \\ y \leq x^2, \\ x \leq 1. \end{cases}$ (**)

Построим $y = -\sqrt{x}$ при $x \leq 1$ и $y = x^2$ при $x \leq 1$.

x	0	1
y	0	-1

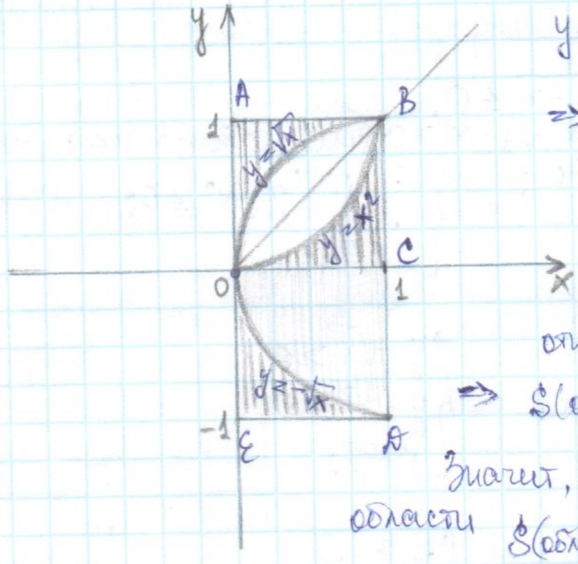
x	1	0	-1
y	1	0	1



Решение системы (*) – пустое множество.

Решение системы (**) – закрашенная область на рисунке.

Решение данного неравенства – закрашенная область на рисунке.



$y=\sqrt{x}$ и $y=x^2$ — обратные функции

$\Rightarrow S$(области OBC) $=$

$= S$(области OAB).

$y=-\sqrt{x}$ и $y=\sqrt{x}$ симметричны относительно Ox

$\Rightarrow S$(области OED) $= S$(области OAB)

Значит, площадь искомой области S(области OCD) $+ S$(области OBC) $=$

$= S$(области OCD) $+ S$(области OED) $=$

$= S(OCDE) = 1 \cdot 1 = 1$.

Ответ: 1.

№5.

$n^3+13n-273=k^3$, $n,k \in N$

$n^3+13n-273>0$, $n^3+13n>273$, $n \geq 6$.

1) $n=6$, $n^3+13n-273=216+78-273=21 \neq k^3$.

2) $n=7$, $n^3+13n-273=343+91-273=161 \neq k^3$.

3) $n=8$, $n^3+13n-273=512+104-273=343=7^3$.

4) Заметим, что далее $n^3+13n-273 \geq (n-1)^3$ при $n \geq 9$.

Рассмотрим случай $(n-1)^3 \leq n^3+13n-273 \leq n^3$.

a) $n^3+13n-273=(n-1)^3$, $n^3+13n-273=n^3-3n^2+3n-1$,

$3n^2 + 10n - 272 = 0.$

$n_1 = -\frac{34}{3} \notin N \quad n_2 = 8$ – "кубоватое" число.

б) $n^3 + 13n - 273 = n^3, \quad 13n - 273 = 0.$

$n = 21$ – "кубоватое" число.

Рассмотрим случай $n^3 + 13n - 273 = (n+m)^3, \; m = 1, 2, 3 \ldots$

$$n^3 + 13n - 273 = n^3 + 3mn^2 + 3m^2n + m^3.$$

$$3mn^2 + (3m^2 - 13)n + (m^3 + 273) = 0.$$

$$D = (3m^2 - 13)^2 - 12m(m^3 + 273) =$$

$$= 9m^4 - 78m^2 + 169 - 12m^4 - 3276m =$$

$$= -3m^4 - 78m^2 - 3276m + 16.$$

Так как $m \geq 1$, то $D < 0 \Rightarrow$ дальше нет больше "кубоватых" чисел.

Итак, 8; 21 – "кубоватые" числа.

$8 + 21 = 29.$

Ответ: 29.

№1.

Сначала найдем количество треугольников в одном большом треугольнике, ориентируясь на одну вершину:

$9(1 + 2 + 3 + 4) + 5 \cdot 8 + 6 \cdot 7 + 7 \cdot 6 + 8 \cdot 5 + 9 \cdot 4 +$
$+ 8 \cdot 3 + 7 \cdot 2 + 6 \cdot 1 = 90 + 40 + 42 + 42 + 40 + 36 + 24 +$
$+ 14 + 6 = 334.$

Таких треугольников 2,
поэтому $2 \cdot 334 = 668$.

Ответ: 668.