(سید مبین رضوی مشهد)

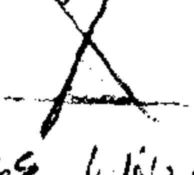
Formula of Unity Olympiad Secretariat in Iran

WWW.MathSymbol.ir

پاسخ برگ مرحله ی دوم المپیاد ریاضی فرمول وحدت ۲۰۱۹/۲۰۱۸

راه حل مساله ی ۱: ۶۶۸

ابتدا با مثالی ساده تر شروع می کنیم
به شکل روبرو دقت کنید. شکل روبرو دارای یک ۶ ضلعی داخلی
است. هر مثلث متساوی الاضلاع درون ۳ خط محصور شده است

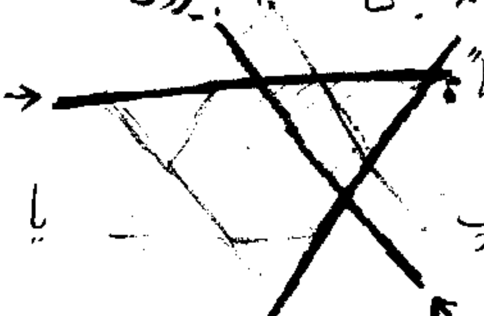


که این ۳ خط هرکدام موازی با یکی از اضلاع ۶ ضلعی است. در واقع هرکدام از
اضلاع داخل یا روی ۶ ضلعی موازی ۳ جهت هستند و در هر جهت شامل ۵ ضلع است:

برای اینکه مثلث متساوی الاضلاع از آن شکل بالا جدا کنیم فقط کافیست
از هرکدام از ۳ جهت، ضلعی را انتخاب کنیم که در نتیجه ناحیه ی محصور شده
بین آن ۳ ضلع یک مثلث است. مثلاً با انتخاب اضلاع مشخص شده در زیر مثلث رنگی
ایجاد می شود:

نکته ی مهم اینجاست که آن مثلث هایی که بخشی از آنها بیرون از ۶ ضلعی
هستند با این روش ایجاد می شوند. مثلاً

یا



(دقت کنید که در شکل روبرو ما از جهت → ضلع بالایی ۶ ضلعی، از جهت ↗ ضلع پایین و چپ ۶ ضلعی و از جهت ↖ ضلعی که مانده به آخر در بالا سمت راست ۶ ضلعی را انتخاب کرده ایم)

پس تعداد مثلث های شکل بالای صفحه می شود تعداد انتخاب های ۳ ضلع از جهت های متفاوت
که می شود ۱۲۵ = $۵^۳$ (زیرا هر جهت دارای ۵ ضلع است) اما آن انتخاب هایی که ۳ ضلع از یک
نقطه بگذرند را باید کم کنیم زیرا مثلث ایجاد شده برابر یک نقطه می شود. و تعداد این انتخاب ها
برابر تعداد نقاط داخل یا روی ۶ ضلعی است (در شکل بالا ۱۹ تا است) زیرا هر ۳ خط همرس
باید از یکی از این نقاط بگذرند پس برای شکل بالا جواب می شود: ۱۰۶ = ۱۹ − ۱۲۵
به همین ترتیب برای شکل صورت سوال برای هر جهت ۹ خط وجود دارد که می شود $۹^۳$ و
تعداد نقاط داخل ۶ ضلعی هم برابر ۹+۲(۵+۶+۷+۸) یعنی ۶۱ است. پس جواب مسئله می شود

$$۹^۳ - ۶۱ = ۷۲۹ - ۶۱ = ۶۶۸$$

سید محسن رضوی (مشهد)

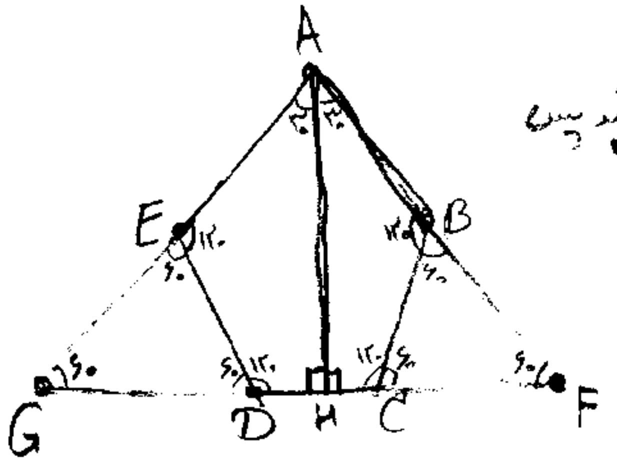
Formula of Unity Olympiad Secretariat in Iran

WWW.MathSymbol.ir

پاسخ برگ مرحله ی دوم المپیاد ریاضی فرمول وحدت ۲۰۱۸/۲۰۱۹

راه حل مساله ی ۲ :

$$\frac{9\sqrt{3}}{2}$$



ابتدا دقت کنید که $H\hat{A}E = H\hat{A}B = 30$

زیرا مجموع زاویه های چهارضلعی $AHCB$ باید ۳۶۰ باشد پس $H\hat{A}B = 360 - 330 = \boxed{30}$ و به همین ترتیب برای $H\hat{A}E$

حال اضلاع AB، AE و CD را امتداد می دهیم

$$C\hat{B}F = B\hat{C}F = 180 - 120 = 60$$

$$G\hat{E}D = G\hat{D}E = 60$$

پس مثلث های $\overset{\triangle}{BCF}$ و $\overset{\triangle}{GED}$ متساوی الاضلاع می شوند. پس $\overset{\triangle}{AGF}$ نیز متساوی الاضلاع می شود

حال فرض کنید $ED = x$ و $BC = y$ پس :

$$AG = AF = GF \Rightarrow 7 + x = 6 + y = x + y + 4 \Rightarrow \boxed{x = 2}\ \boxed{y = 3}$$

راه اول : حال چون $H\hat{A}F = 30$ و $AF = 6 + 3 = 9$ پس

$$AH = AF \cdot \cos 30 = 9 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{2}$$

راه دوم :

$$\left.\begin{array}{l} H\hat{A}F = H\hat{A}G \\ A\hat{H}G = A\hat{H}F \\ AH = AH \end{array}\right\} \xRightarrow{\text{زضز}} \overset{\triangle}{AHF} \cong \overset{\triangle}{AHG} \Rightarrow HF = HG \Rightarrow \left.\begin{array}{r} 3 + HC = 2 + HD \\ HC + HD = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} DH = 2.5 \\ HC = 1.5 \end{array}$$

$$\Rightarrow HF = 4.5$$

$$\Rightarrow AH = \sqrt{AF^2 - HF^2} = \sqrt{9^2 - \left(\frac{9}{2}\right)^2} = \frac{9\sqrt{3}}{2}$$

Formula of Unity Olympiad Secretariat in Iran

WWW.MathSymbol.ir

سعید حسین رضوی (مشهد)

پاسخ برگ مرحله ی دوم المپیاد ریاضی فرمول وحدت ۲۰۱۸/۲۰۱۹

راه حل مساله ی ۳ : $\boxed{1}$

$(y+\sqrt{x})(y-x^2)\sqrt{1-x} \leq 0$

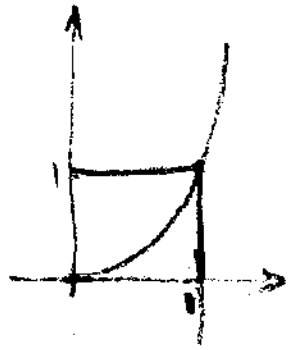
چون $\sqrt{1-x}$ و $\sqrt{x}$ اعدادی حقیقی باید باشند پس $x, 1-x \geq 0 \Rightarrow \boxed{0 \leq x \leq 1}$ (★)

حال چون $\sqrt{1-x} \geq 0$ پس : $(y+\sqrt{x})(y-x^2) \leq 0$

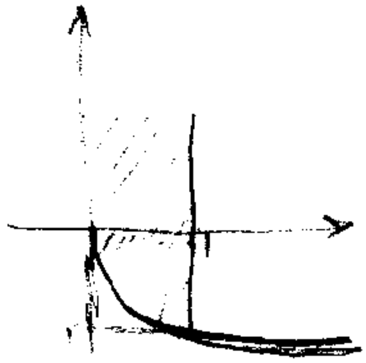
پس دو حالت داریم : ۱) $y-x^2 \geq 0$ و $y+\sqrt{x} \leq 0 \Rightarrow y \geq x^2 \Rightarrow y \geq 0 \Rightarrow y+\sqrt{x} \geq 0$ تناقض

پس حالت ① غلط است

$$\Rightarrow 2)\ \left.\begin{array}{l} y-x^2 \leq 0 \\ y+\sqrt{x} \geq 0 \end{array}\right\} \Rightarrow -\sqrt{x} \leq y \leq x^2$$

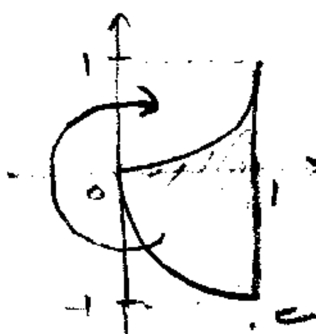


خب دقت کنید که نمودار x^2 به شکل مقابل است (نمودار سهمی) و $y \leq x^2$ (در بازه‌ی $0 \leq x \leq 1$) برابر ناحیه‌ی رنگی است



و $-\sqrt{x}$ نیز نمودار وارون x^2 و به شکل مقابل است. پس $y \geq -\sqrt{x}$ (در بازه‌ی $0 \leq x \leq 1$) برابر ناحیه‌ی رنگی است

پس اشتراک دو نمودار یعنی ناحیه‌ی $-\sqrt{x} \leq y \leq x^2$ به شکل روبرو است :



حال چون بخش پایین محور x ، وارون نمودار بخش بالای محور است پس بخش پایین محور x برابر ناحیه‌ی مربع ۱در۱ منهای بخش بالای محور است پس می‌توانیم آن را به بالا انتقال دهیم و بنویسیم مساحت کل برابر ① است

Formula of Unity Olympiad Secretariat in Iran

WWW.MathSymbol.ir

سید حسین رضوی مشهد

پاسخ برگ مرحله ی دوم المپیاد ریاضی فرمول وحدت ۲۰۱۸/۲۰۱۹

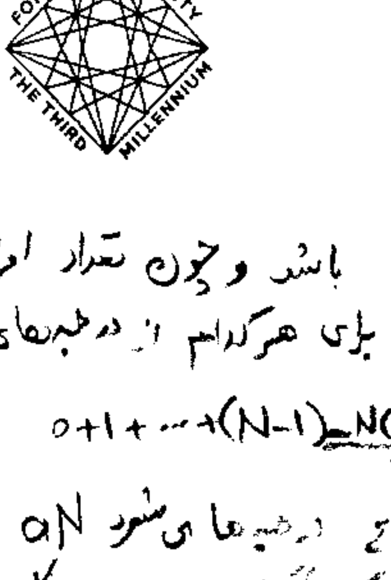
تمام n های فرد

راه حل مساله ی ۴:

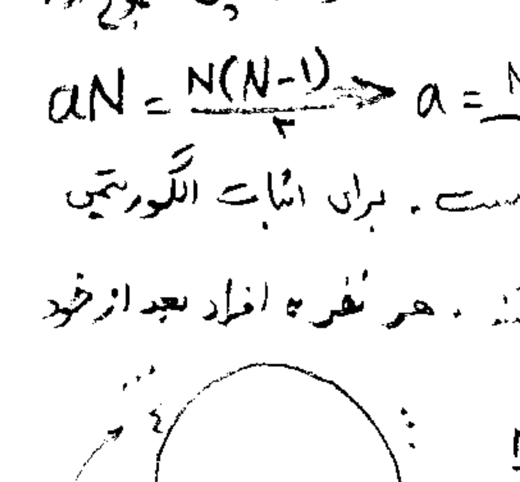
دقت کنید که درجه‌ی هر رأس می‌تواند از ۰، ۱، ...، تا $N-1$ باشد و چون تعداد افراد N نفر و هر کس درجه اش متفاوت است پس دقیقاً یک نفر برای هر کدام از درجه‌های ۰، ...، $N-1$ وجود دارد. پس مجموع درجه ها می شود $0+1+\dots+(N-1)=\frac{N(N-1)}{2}$

از طرفی اگر درجه‌ی دریافتی هر رأس با هم برابر باشند مثلاً a، مجموع درجه‌ها می شود aN (درجه یعنی تعداد کادوهایی که داده و درجه‌ی دریافتی یعنی تعدادی که گرفته پس مجموع درجه‌های دریافتی برابر مجموع کل درجه‌هاست.) $aN=\frac{N(N-1)}{2} \Rightarrow a=\frac{N-1}{2} \Rightarrow$ N باید فرد باشد.

حال اثبات می کنیم که برای تمام n های فرد این کار ممکن است. برای اثبات الگوریتمی ارائه می‌دهیم:



فرض کنید افراد به ترتیب درجه‌ها شان در یک دایره نشسته باشند. هر نفر به افراد بعد از خود (به اندازه‌ی درجه اش) به ترتیب ساعتگرد کادو می‌دهد. حال اثبات می‌کنیم که طبق این الگوریتم تمام افراد به اندازه‌ی $\frac{N-1}{2}$ کادو می‌گیرند.



نفر i ام را در نظر بگیرید. فرض کنید آخرین نفر در سمت راست او که بهش کادو می‌دهد $i-k$ باشد پس:

$$\underbrace{i-k}_{\text{تعداد کادوهایی که می‌دهد}} = \underbrace{k}_{\text{تعداد افراد از نفر } i \text{ ام تا } i-k \text{ که کادو از } i-k \text{ به آنها می‌رسد}} \Rightarrow i=2k \Rightarrow k=\left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor$$

و فرض کنید اولین نفر سمت چپ i که به i کادو می‌دهد $i+k'$ باشد

پس مثل بالا

$$i+k' = N-1-\underbrace{(k'-1)}_{\text{تعداد افرادی که از } i+k' \text{ تا } i \text{ به آنها کادو می‌رسد}} \Rightarrow 2k' = N-i \Rightarrow k'=\left\lceil \frac{N-i}{2}\right\rceil$$

پس k نفر در راست i و $N-k'$ نفر در چپ او (از نفر $i+k'$ تا $N-1$) به او کادو می‌دهند پس درجه‌ی دریافتی i می‌شود: (دقت کنید N فرد است)

$$N-k'-i+k = N-\left\lceil\frac{N-i}{2}\right\rceil+\left\lfloor\frac{i}{2}\right\rfloor - i = \begin{cases} i = \text{زوج} \Rightarrow = N-\frac{N-i+1}{2}+\frac{i}{2}-i = \frac{N-1}{2} \\ i = \text{فرد} \Rightarrow = N-\frac{N-i}{2}+\frac{i-1}{2}-i=\frac{N-1}{2}\end{cases}$$

سید مبین رضوی مشهد

Formula of Unity Olympiad Secretariat in Iran

WWW.MathSymbol.ir

پاسخ برگ مرحله ی دوم المپیاد ریاضی فرمول وحدت ۲۰۱۸/۲۰۱۹

راه حل مساله ی ۵ : $\boxed{29}$

$m^3 = n^3 + 13n - 273 \Rightarrow (m-n)(m^2+mn+n^2) = 13(n-21)$

حال ابتدا فرض کنیم $n > 21$ در نتیجه طرف راست مثبت است پس طرف چپ نیز باید مثبت باشد

پس $m > n$. ما می دانیم که $n-21 < n^2 < m^2+mn+n^2$ پس برای اینکه تساوی برقرار باشد باید $m-n < 13$ باشد:

$21 < n < m < n+13$

$\Rightarrow m = n+k \ (1 \leq k \leq 12)$

$\Rightarrow (n+k)^3 = n^3+k^3+3nk(n+k) = n^3+13(n-21) \Rightarrow k^3+3nk(n+k) = 13(n-21)$, $k \geq 1$ $\Rightarrow$

$13(n-21) \geq 1+3n(n+1) \rightarrow 3n^2-10n+274 \leq 0 \Rightarrow n^2-\frac{10}{3}n+\frac{274}{3} \leq 0$

$\Rightarrow \left(n-\frac{5}{3}\right)^2+\frac{274}{3}-\frac{25}{9} \leq 0 \Rightarrow \left(n-\frac{5}{3}\right)^2+\frac{797}{9} \leq 0 \rightarrow$ امکان ندارد زیرا طرف چپ همواره بزرگتر از صفر است

$\Rightarrow \boxed{n \leq 21}$

حال چون به ازای $m=n=21$ تساوی برقرار است پس $n=21$ یک جواب است حال فرض کنیم: $n < 21$

$\Rightarrow n-21 < 0 \Rightarrow m-n < 0 \Rightarrow$ (طرفین را در -1 ضرب میکنیم) $(n-m)(m^2+mn+n^2) = 13(21-n)$

$\Rightarrow (n-m)(m^2+mn+n^2) = 273-13n < 273 \Rightarrow m^2+mn+n^2 < 273 \Rightarrow n^2 < 273 \Rightarrow n \leq 16$

if $n=16 \Rightarrow (16-m)(m^2+16n+16^2) = 13\times5$ تناقض (زیرا $16^2 > 13\times5$)

$n=15 \Rightarrow (15-m)(m^2+15n+15^2) = 13\times6$ تناقض (زیرا $15^2 > 13\times6$)

$n=14 \Rightarrow$ تناقض ($14^2 > 13\times7$)

$n=13 \Rightarrow$ تناقض ($13^2 > 13\times8$)

$n=12 \Rightarrow$ تناقض ($12^2 > 13\times9$)

از طرفی $6 \leq n$ تا طرف راست تساوی اولیه مثبت شود.

$n=6 \Rightarrow m^3 = 21$ تناقض

$n=7 \Rightarrow m^3 = 161$ تناقض

$n=8 \Rightarrow m^3 = 343 \Rightarrow m=7 \rightarrow (n,m) = (8,7)$ و

$n=9 \Rightarrow m^3 = 573$ تناقض

$n=10 \Rightarrow m^3 = 857$ تناقض

$n=11 \Rightarrow m^3 = 1201$ تناقض

پس فقط برای $n=8$ و 21 معادله برقرار است پس جواب سوال می شود: $8+21=29$