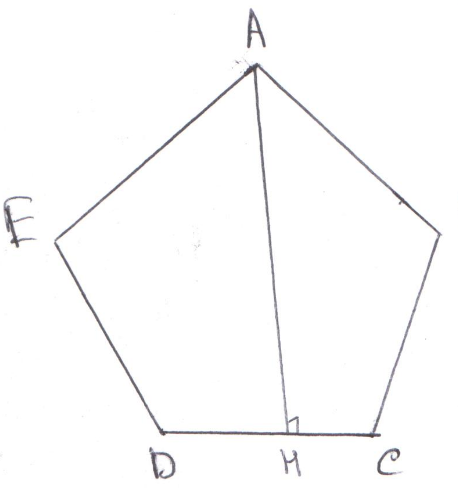
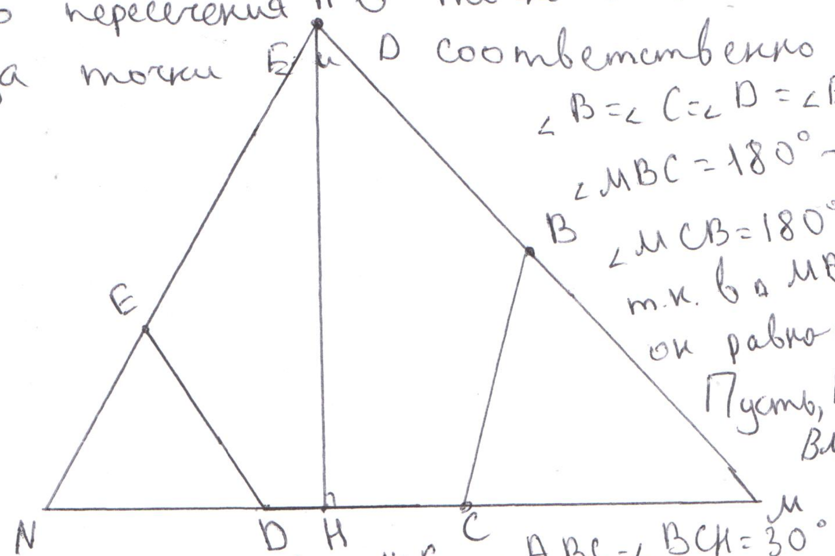
№2.



Дано:
$\angle A = 60^\circ$
$\angle B = \angle C = \angle D = \angle E$
$AB = 6$
$CD = 4$
$EA = 7$
Найти: расстояние от т. A до CD.

Решение:
Расстоянием от точки до прямой является перпендикуляр, опущенный из этой точки на данную прямую. Опустим из точки A перпендикуляр AH к DC, $AH \perp DC$.
Продлим AB и DC за точки B и C соответственно до пересечения в точке M. Так же продлим AE и CD за точки E и D соответственно до пересечения в т. N.



$\angle B = \angle C = \angle D = \angle E = \frac{540 - 60}{4} = 120^\circ$
$\angle MBC = 180^\circ - \angle ABC = 60^\circ$
$\angle MCB = 180^\circ - \angle BCH = 60^\circ$
т.к. в $\triangle MBC$ 2 угла по 60°, то он равносторонний.
Пусть, $HC = x$, тогда $DH = 4 - x$,
$BM = MC = a$

$\angle HAB = 360^\circ - \angle AHC - \angle ABC - \angle BCH = 30^\circ$
$\angle HAE = 60^\circ - \angle HAB = 30^\circ$
В $\triangle AHM$ $\angle AHM = 90^\circ$, а $\angle HAM = 30^\circ$
По свойству угла в 30° в прямоугольном треугольнике $2HM = AM$
$2(x + a) = 6 + a$
$a = 6 - 2x$
В $\triangle NED$: $\angle NED = \angle EDN = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$
$\triangle NED$ - равносторонний, т.к 2 угла в 60°.
Пусть, $NE = ND = b$, тогда по св-ву угла в 30° в $\triangle ANH$:
$b + 7 = 2(b + 4 - x)$
$b = 2x - 1$
Т.к. $\angle ANM = \angle NMA = 60^\circ$, то $AN = AM$
$7 + 2x - 1 = 6 + 6 - 2x$
$4x = 6$ $x = 1,5$

ΔAHN - прямоугольный.
По т. Пифагора: $\boxed{AN = 7+2\cdot 1{,}5-1 = 9 \quad NH = 1{,}5\cdot 2-1+4-1{,}5 = 4{,}5}$

$AH = \sqrt{AN^2 - NH^2} = \sqrt{9^2 - 4{,}5^2} = \sqrt{(9+4{,}5)(9-4{,}5)} = \sqrt{4{,}5\cdot 4{,}5\cdot 3} = 4{,}5\sqrt{3}$

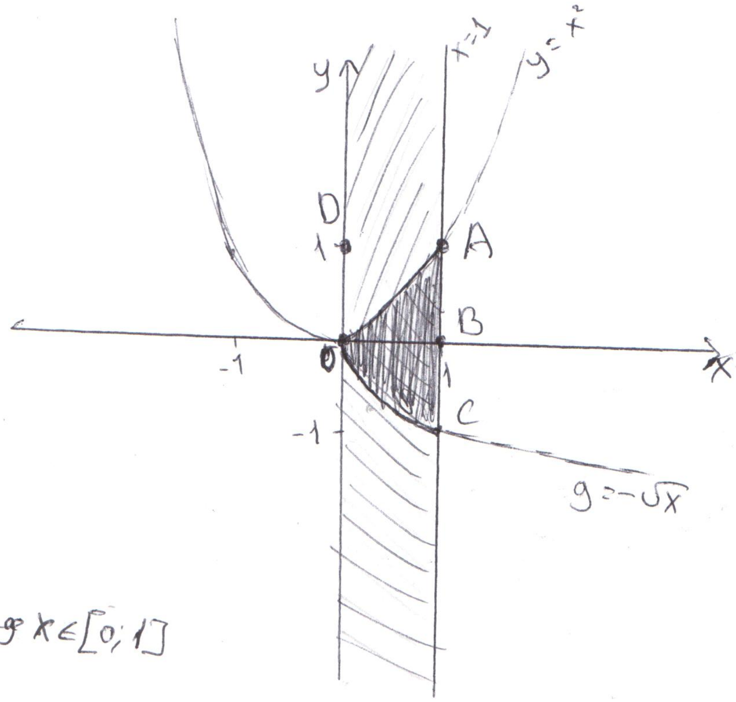
Ответ: $4{,}5\sqrt{3}$.

№3.

$(y+\sqrt{x})(y-x^2)\sqrt{1-x} \leq 0$

ОДЗ: $x \geq 0 \quad 1-x \geq 0$

$x \in [0; 1]$



Т.к. $\sqrt{1-x} \geq 0$, то $(y+\sqrt{x})(y-x^2) \leq 0$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y+\sqrt{x} \geq 0 \\ y-x^2 \leq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} y+\sqrt{x} \leq 0 \\ y-x^2 \geq 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

Построим границы: $y=-\sqrt{x}$
$y = x^2$
~~$y=\sqrt{x}$~~
$x = 1$

Надо рассматривать область, где $x \in [0; 1]$

$\begin{cases} y \leq -\sqrt{x} \\ y \geq x^2 \end{cases}$ не имеет решений.

А решения $\begin{cases} y \geq -\sqrt{x} \\ y \leq x^2 \end{cases}$ показаны на графике двойной штриховкой.

Т.к. $y = x^2$ - парабола, а $y = -\sqrt{x}$ - гипербола, то

$S_{OBC} = S_{DOA} \Rightarrow S_{OAC} = S_{AOB} + S_{OBC} = S_{AOB} + S_{DOA} = S_{DABO}$

$ABOD$ - квадрат, со стороной 1.

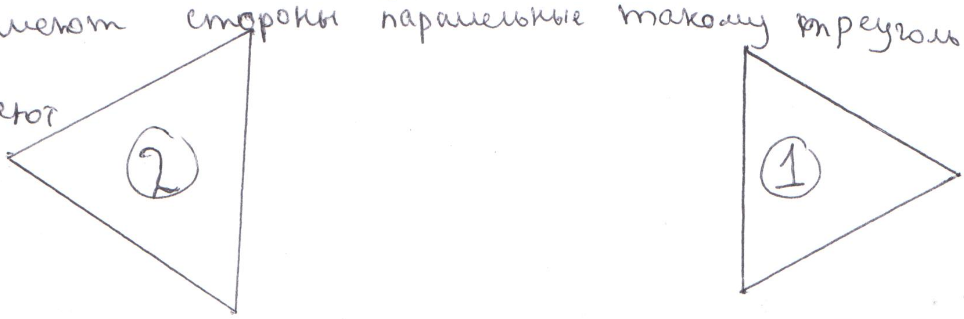
$S_{ABOD} = 1$.

Ответ: 1

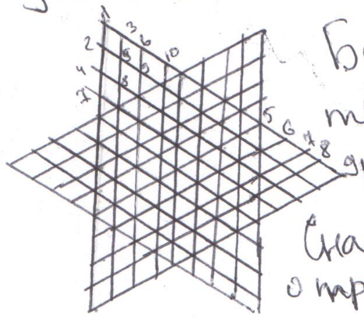
№1.

На данном рисунке можно разделить треугольники на 2 вида. Первые имеют стороны параллельные такому треугольнику;

А вторые имеют стороны параллельные сторонам такого!



Их равное количество, поэтому достаточно посчитать треугольники 1 вида и умножить на 2.



Будем их считать по вершинам и количеству прямых, отрезки которых могут быть нижней стороной этого треугольника.

Сначала 10 вершин и для каждой по 9 отрезков: $9\cdot 10$.

Далее 5 вершин и 8 отрезков; 6 вершин и 7 отрезков; ...;
9 вершин и 4 отрезка; 8 вершин и 3 отрезка...

Итого: $2\cdot(9\cdot 10+8\cdot 5+7\cdot 6+6\cdot 7+5\cdot 8+9\cdot 4+3\cdot 8+2\cdot 7+6\cdot 1)=$
$=2\cdot 334=668$.

Ответ: 668 треугольников

№4.

Так как все дети подарили разное количество подарков, а максимум можно подарить $N-1$, то все количества от 0 до $N-1$ были по одному разу. Значит, всего подарков было подарено $\frac{(N-1)N}{2}$ и каждый получил одинаковое количество $\frac{(N-1)\cdot\cancel{N}}{2\cancel{N}} \Rightarrow N\equiv 1 \pmod 2$

Любое нечетное количество детей (больше 1) возможно.

Докажем это методом математической индукции:

База: $N=3$

Все получили по 1 подарку и подарили разное количество.

Пусть для $N=K$ верно.

$N=K+2$:

Ребенок, который будет дарить $K+1$ подарок, подарит всем, а тот, кто будет дарить K подарков подарит всем, кроме того, кто дарит $K+1$. После этого ребенку, который дарил $K+1$ подарок подарят подарки все, у кого наибольшее количество подарков, то есть

лист 3

$\frac{k+1}{2}$ ребенок. И окажется случай с k детьми. А для него верно.

Ответ: при любых нечетных N, $N>1$.

№5.

Рассмотрим 3 варианта:

1) Если получится n^3

$n^3+13n-273=n^3$

$\boxed{n=21}$

2) Если получится большее число, чем n^3

$n^3+13n-273=(n+k)^3$ $\quad k>0, k\in N$

$n^3+13n-273=n^3+3n^2k+3k^2n+k^3$

$3n^2k+n(3k^2-13)+k^3+273=0$

$D=(3k^2-13)^2-4\cdot 3k(k^3+273)=$

$=9k^4-78k^2+169-12k^4-12\cdot 273k=$

$=169-78k^2-3k^4-12\cdot 273k.$

Очевидно, что $D<0$. Значит, таких чисел не существует.

3) Если получится число, меньшее n^3.

$k>0, k\in N$

$n^3+13n-273=(n-k)^3$

$n^3+13n-273=n^3-3kn^2+3nk^2-k^3$

$3kn^2+n(13-3k^2)-273+k^3=0$

$D=(13-3k^2)^2-4\cdot 3k(k^3-273)=169-78k^2+9k^4-12k^4+12\cdot 273k=$

$=169-78k^2-3k^4+12\cdot 273k=3276k+169-78k^2-3k^4$

при $k=1$: $D=3364$

$n=\frac{3-13+58}{6}=8$

при $k=2$: $D=6361$, а это не квадрат целого числа

при $k=3$ $D=9052$, это не квадрат.

При больших k дискриминант сначала будет возрастать, но не будет квадратом целого числа, а затем будет убывать, и станет меньше 0

Итак, только 2 таких числа: $21+8=29$

Ответ: 29.