

№1. Рассмотрим количество треугольников ^{каждого} ~~одного~~ размера.

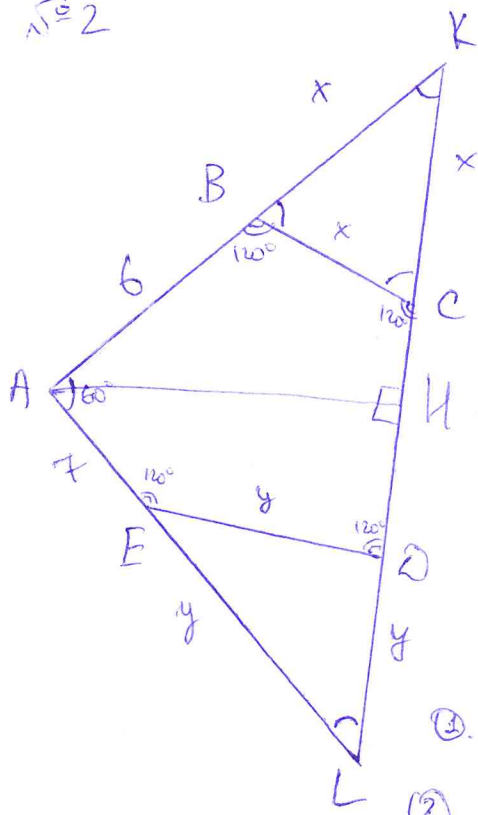
Рассмотрим вертикальную сторону как основание, то треугольников будет справа и слева поровну.

Пусть количество треугольников - количество возможных расположений вершины:

$$2 \cdot (60 + 57 + 52 + 45 + 36 + 28 + 21 + 15 + 10 + 6 + 3 + 1) = 2 \cdot 334 = 668$$

Ответ: 668

№2



Сумма углов в пятиугольнике равна 540°
 $(n-2) \cdot 180^\circ = (5-2) \cdot 180^\circ = 540^\circ$

Т.к. $\angle B = \angle C = \angle D = \angle E$ (по условию) =

$$\angle B = \frac{540^\circ - 60^\circ}{4} = 120^\circ$$

Пусть прямые AB и CD пересекаются в точке K, а AE и CD пересекаются в точке L

Рассмотрим треугольник AKL.

①. $\angle A = 60^\circ$ по условию

②. $\angle KBC = 180^\circ - \angle ABC$ (как смежные углы) $= 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$

$\angle KCB = 180^\circ - \angle BCD = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ \Rightarrow$
 (как смежные)

$\angle BKC = 180^\circ - 60^\circ - 60^\circ = 60^\circ \Rightarrow \Delta BKC$ - равносторонний
 (теорема о сумме углов в Δ)

③ $\angle ALK = 180^\circ - \angle AKL - \angle KAL = 180^\circ - 60^\circ - 60^\circ = 60^\circ$

ΔAKL - равносторонний по свойству

АН - высота в ΔAKL .

ΔBKC - равносторонний со стороной x (см. пункт 2)

ΔEDC - равносторонний т.к. $180^\circ - \angle AED = 180^\circ - \angle CDE = \angle DEC = \angle LDE = 60^\circ$ и $\angle ALK = 60^\circ$. Пусть сторона $ED = y$ (как смежные углы)

Т.к. ΔKAL - равносторонний $\Rightarrow$

$$AK = KL = LA$$

$$6 + x = x + 4 + y = y + 7$$

$$6 + x = 7 + y \Rightarrow x = y + 1$$

$$6 + x = x + 4 + y \Rightarrow 6 + y + 1 = y + 1 + 4 + y \Rightarrow y = 2, x = 3 \Rightarrow AK = 6 + 3 = 9 = AL = LK$$

Рассмотрим ΔANK - прямоугольный по условию. Т.к. ΔALK равносторонний $\Rightarrow$ АН - медиана (свойство) $\Rightarrow KN = 4,5$

$$AN = \sqrt{9^2 + 4,5^2} = \sqrt{60,75} = \sqrt{4,5 \cdot 13,5} = \sqrt{\frac{9}{2} \cdot \frac{27}{2}} = \frac{9}{2} \sqrt{3} = 4,5 \sqrt{3}$$

теорема Пифагора

Ответ: $4,5 \sqrt{3}$

№ 3

$$(y + \sqrt{x})(y - x^2)\sqrt{1-x} \leq 0$$

Область допустимых значений: $\begin{cases} x \geq 0 \\ 1-x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow 0 \leq x \leq 1$

Т.к. $\sqrt{1-x} \geq 0$, то неравенство выполняется при

$$\begin{cases} (y + \sqrt{x})(y - x^2) \leq 0 \\ \sqrt{1-x} = 0 \end{cases}$$

1. Если $\sqrt{1-x} = 0$, то $x = 1$ а y - любое действительное число

2. Если $(y + \sqrt{x})(y - x^2) \leq 0$

$$\begin{cases} y + \sqrt{x} \geq 0 \\ y - x^2 \leq 0 \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

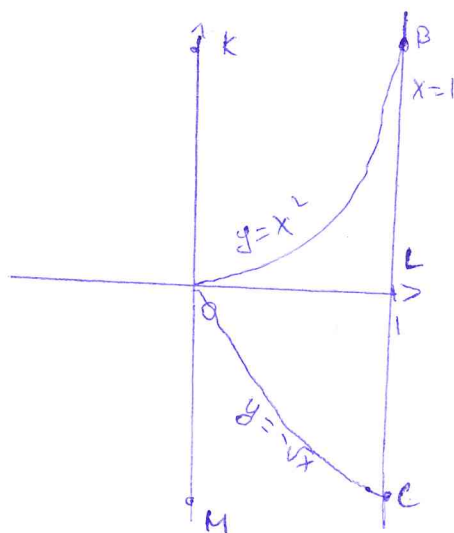
$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} y \geq -\sqrt{x} \\ y \leq x^2 \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y \geq -\sqrt{x} \\ y \leq x^2 \\ 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

решений

нет, что видно по множеству точек



Т.к. $y = x^2$ и $y = -\sqrt{x}$ отсекают равные фигуры при $x \in [0; 1] \Rightarrow$

$$S_{OBL} = S_{OCM}, \text{ а } S_{OKB} = S_{OLC} \Rightarrow S_{OBKC} = \frac{1}{2} (2S_{OBL} + 2S_{OLC}) = \frac{1}{2} (S_{OBL} + S_{OKBO} + S_{OLC} + S_{OLCK}) =$$

$$= \frac{1}{2} S_{MKBC} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = 1$$

$$N \geq 4$$

По условию задачи ребенок не может дарить подарок себе и другим не может подарить больше одного подарка. Поэтому рассмотрим одного ребенка P_i , где $1 \leq i \leq N$. Этот ребенок мог сделать количество подарков из множества $\Pi = \{0, 1, 2, \dots, N-1\}$

Все дети сделали подарки из множества $\Pi = \{0, 1, 2, \dots, N-1\}$, причем сделали разное количество $\Rightarrow$ количество подарков равно сумме чисел множества Π .

$$0 + 1 + 2 + \dots + (N-1) = \frac{0 + N-1}{2} \cdot N = \frac{(N-1) \cdot N}{2}$$

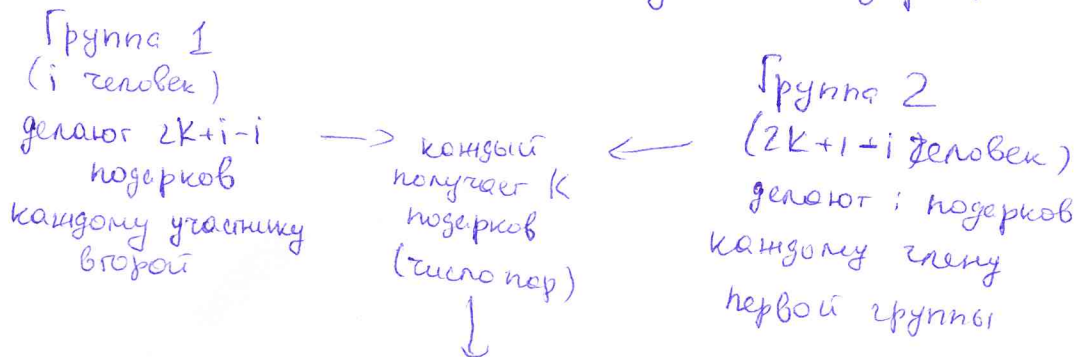
Эта сумма должна делиться на количество детей $\Rightarrow$

$$\frac{N-1}{2} - \text{целое число} \Rightarrow (N-1) - \text{четное число} \Rightarrow N - \text{нечетное} \Rightarrow N = 2k+1$$

Докажем, что $N = 2k+1$ это возможно

дети	P_1	P_2	P_3	...	P_{N-2}	P_{N-1}	P_N
N°	0	1	2		$2k-2$	$2k-1$	$2k$

Пусть ребенок под номером i сделал i подарков



1 пара	2 пара	3 пара	...	k -я пара
1; $2k$	2; $2k-1$	3; $2k-2$		k ; $k+1$

кроме человека $N^{\circ} 0$

№5 $n^3 + 13n - 273 = m^3$, n, m — натуральные числа

① Пусть $n = m$: $13n = 273$

$n = 21$ — кубовое число

② Пусть $m > n$, тогда $m^3 - n^3 = 13n - 273 = 13(n - 21)$

Т.к. $m^3 - n^3 \geq (n+1)^3 - n^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1$,

$13(n-21) \geq 3n^2 + 3n + 1$

$13n - 273 - 3n^2 - 3n - 1 \geq 0$

$3n^2 - 10n + 274 \leq 0$

$D = 100 - 4 \cdot 3 \cdot 274 < 0 \rightarrow$ натуральных решений нет

③ Пусть $n > m$, тогда $n^3 - m^3 = 13n - 273 = 13(n - 21)$

$n^3 - m^3 \geq n^3 - (n-1)^3 = n^3 - n^3 + 3n^2 - 3n + 1 = 3n^2 - 3n + 1$

то $13(21-n) \geq 3n^2 - 3n + 1$

$273 - 13n \geq 3n^2 - 3n + 1$

$3n^2 + 10n - 272 \leq 0$

$D = 100 + 4 \cdot 3 \cdot 272 = 3364$; $\sqrt{D} = 58$

$n_1 = \frac{-10 + 58}{6} = 8$

и $n_2 = \frac{-10 - 58}{6} = -11\frac{1}{3}$

$n \in [-11\frac{1}{3}; 8]$, но n — натуральное $\Rightarrow$ проверяем $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$

$n = 1$: $1 + 13 - 273 = m^3$, $m \leq 0$

$n = 2$: $8 + 26 - 273 = m^3$, $m \leq 0$

$n = 3$: $27 + 39 - 273 = m^3$, $m \leq 0$

$n = 4$: $64 + 52 - 273 = m^3$, $m \leq 0$

$n = 5$: $125 + 65 - 273 = m^3$, $m \leq 0$

Т.к. m — натуральное $\Rightarrow$ вариантов не подходит

$n = 6$: $216 + 78 - 273 = m^3$, $m^3 = 21$, $m = \sqrt[3]{21} \notin \mathbb{N}$

$n = 7$: $343 + 91 - 273 = m^3$, $m^3 = 161$, $m = \sqrt[3]{161} \notin \mathbb{N}$

$n = 8$: $512 + 104 - 273 = 343$; $m^3 = 343$; $m = 7$

Сумма кубовых чисел равна: $8 + 21 = 29$.

Ответ: 29