

№5

$$n^3 + 13n - 273 = k^3$$

$$n, k \in \mathbb{N}$$

Докажем, что при $n > 21$ уравнение

не имеет целочисленных корней.

Если $n > 21$, то $13n > 273$, тогда

$13n - 273 > 0$, откуда $k^3 > n^3$. В силу монотонности функции $y = x^3$, $k > n$.

Итак, $k > n > 21$

Исходя из этого докажем неравенство
 $n^3 - k^3 < 273 - 13n$ для $n, k \in \mathbb{Z}$.

Т.к. n и k — натуральные и $k > n$,
то $k \geq n+1$. Значит,

$$k^3 \geq (n+1)^3$$

$$-k^3 \leq -(n+1)^3$$

$$n^3 - k^3 \leq n^3 - (n+1)^3 = n^3 - (n^3 + 3n^2 + 3n + 1) = - (3n^2 + 3n + 1)$$

Теперь докажем, что

$$-(3n^2 + 3n + 1) < 273 - 13n$$

~~Вывод~~

Док-во: рассмотрим ~~уравнение~~ квадратный
трехчлен $3n^2 - 10n + 274$. Он не имеет
корней, т.к. его дискриминант $D = 100 - 12 \cdot 274 < 0$.
Значит, $3n^2 - 10n + 274 > 0 \quad \forall n \in \mathbb{R}$, откуда
 $3n^2 + 3n + 1 > 13n - 273$ и

$$-(3n^2 + 3n + 1) < 273 - 13n.$$

З.Т. 2.

Что мы имеем:

$$\begin{cases} n^3 - k^3 \leq -(3n^2 + 3n + 1) \\ -(3n^2 + 3n + 1) < 273 - 13n. \end{cases}$$

Отсюда

$$n^3 - k^3 < 273 - 13n$$

$$n^3 + 13n - 273 < k^3.$$

Значит < никогда не обращается в равенство,
значит, при $n > 21$ корней нет — доказано.

Осталось решить уравнение $n^3 + 13n - 273 = k^3$

для $n \in [1; 21] \cap \mathbb{N}$.

Сделаем это перебором.

~~Попробуем~~ Попробуемся немного упростить перебор.

k , по условию, натуральное, тогда

$$f(n) = n^3 + 13n - 273 > 0$$

Заметим, что при $n = 5$, $f(n) = -83 < 0$,

но при $n = 6$, $f(n) = 21 > 0$.

Значит, на промежутке $(5; 6)$ $f(n)$ имеет корень.

Заметим, что $f(x)$ возрастает на $\mathbb{R}$.

Действительно, ведь ее производная

$$3n^2 + 13 > 0 \quad \forall n \in \mathbb{R}.$$

А раз она возрастает, то имеет не более

одного корня. Значит, кроме корня x_1 , который

Мы нашли на промежутке $(5; 6)$,
больше нет корней.

А значит,

при $n \in (-\infty; 5)$, $f(n) < 0$,

при $n \in (6; +\infty)$, $f(n) > 0$.

Значит, варианты где $n \leq 5$ можно не
рассматривать, ведь тогда будет получаться
число меньше 0 $\Rightarrow$ не куб натурального.

Далее перебор

- 1) $n=6$; $n^3 + 13n - 273 = 21 = k^3$, $k \notin \mathbb{N}$.
- 2) $n=7$; $n^3 + 13n - 273 = 161 = k^3$, $k \notin \mathbb{N}$.
- 3) $n=8$; $n^3 + 13n - 273 = 343 = k^3$, $k=7$ - подходит.
- 4) $n=9$; $n^3 + 13n - 273 = 573 = k^3$, $k \notin \mathbb{N}$.
- 5) $n=10$; $n^3 + 13n - 273 = 857 = k^3$, $k \notin \mathbb{N}$.
- 6) $n=11$; $n^3 + 13n - 273 = 1201 = k^3$, $k \notin \mathbb{N}$.
- 7) $n=12$; $n^3 + 13n - 273 = 1611 = k^3$, $k \notin \mathbb{N}$.
- 8) $n=13$; $n^3 + 13n - 273 = 2093 = k^3$, $k \notin \mathbb{N}$.
- 9) $n=14$; $n^3 + 13n - 273 = 2653 = k^3$, $k \notin \mathbb{N}$.
- 10) $n=15$; $n^3 + 13n - 273 = 3297 = k^3$, $k \notin \mathbb{N}$.
- 11) $n=16$; $n^3 + 13n - 273 = 4031 = k^3$, $k \notin \mathbb{N}$.
- 12) $n=17$; $n^3 + 13n - 273 = 4861 = k^3$, $k \notin \mathbb{N}$.
- 13) $n=18$; $n^3 + 13n - 273 = 5793 = k^3$, $k \notin \mathbb{N}$.
- 14) $n=19$; $n^3 + 13n - 273 = 6833 = k^3$, $k \notin \mathbb{N}$.
- 15) $n=20$; $n^3 + 13n - 273 = 7987 = k^3$, $k \notin \mathbb{N}$.
- 16) $n=21$; $n^3 + 13n - 273 = 9261 = k^3$, $k=21$ - подходит. (3)

Ответ: $8 + 21 = \boxed{29}$

№1.

Заметим, что любые две не параллельные
прямые на ~~рис~~ рисунке справа
пересекаются. Заметим.

Также заметим, что на рисунке справа есть
только 3 вида попарно не параллельных прямых
(вертикальные, идущие вверх и идущие вниз).

Рассмотрим что нам нужно сделать, чтобы
задать треугольник. Нам нужно всего-лишь
выбрать 3 прямые (разумеется, не параллельные),
которые будут ограничивать его стороны.

То есть выбрать одну из 9 вертикальных,
~~одну~~ одну из 9 идущих вверх, и одну
из 9 идущих вниз. По выше сказанному,
каждая из полученных трех прямых пересечет
каждую, и получится треугольник. (рис.1)

Выбираем



Выбираем вертикальную 9 способами, идущую
вверх 9 способами и идущую вниз 9 способами.

Что имеем $9 \cdot 9 \cdot 9 = 9^3$ треугольников.

Но здесь мы не учитываем
вырожденные случаи, когда все
три прямые пересекаются в одной
точке. Количество таких случаев

равно ~~когда~~ количеству точек внутри
6-угольника: Каждая точка в нем определяет

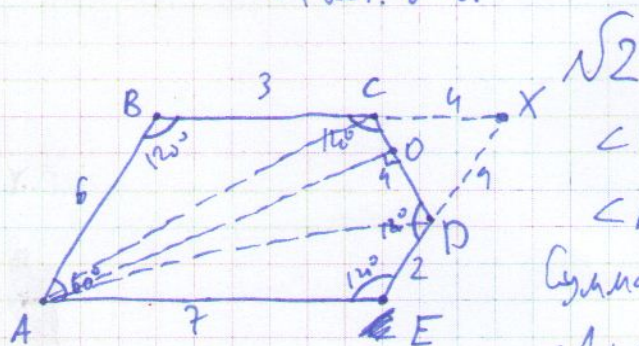


единственную тройку прямых,
которые все пересекаются в этой
точке. Такие точки можно

исчитать руками, см. $5+6+7+8+9+8+7+6+5 = 61$.

Значит, количество треугольников $9^3 - 61 = 729 - 61 =$
 $= 668$

Ответ: 668.



$$\angle B = \angle C = \angle D = \angle E.$$

$$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E = \angle A + 4\angle B.$$

Сумма углов 5-угольника равна 540° .

$$\angle A + 4\angle B = 540^\circ$$

$$60^\circ + 4\angle B = 540^\circ$$

$$\angle B = \angle C = \angle D = \angle E = 120^\circ.$$

Заметим, что $\angle A + \angle B = 120^\circ + 60^\circ = 180^\circ$. Значит, $AE \parallel BC$.

Заметим, что $\angle A + \angle E = 120^\circ + 60^\circ = 180^\circ$. Значит, $DE \parallel AB$.

Продлим BC и DE до пересечения. $BC \cap DE = X$.

Т.к. $AB \parallel EX$ и $BX \parallel AE \Rightarrow ABXE$ - параллелограмм.

Значит, $AB = EX$ и $BX = AE$ по сл-ву
параллелограмма.

$$\angle XCD = 180^\circ - \angle BCD = 60^\circ$$

$$\angle XDC = 180^\circ - \angle CDE = 60^\circ$$

Значит, $\triangle CXD$ - равносторонний,
 $CD = XC = XD = 4$.

Но $BX = AE = 7$. Значит,

$$BC = AE - CD = 7 - 4 = 3.$$

$$DE = 6 - 4 = 2.$$

Рассм. $\triangle ABC$. по теореме косинусов:

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos 120^\circ = AB^2 + BC^2 + AB \cdot BC =$$
$$= 36 + 9 + 18 = 63; \quad \boxed{AC = \sqrt{63}}$$

В $\triangle AED$:

$$AD^2 = AE^2 + DE^2 - 2AE \cdot DE \cdot \cos 120^\circ =$$
$$= AE^2 + DE^2 + AE \cdot DE = 49 + 4 + 14 = 67.$$

$$AD = \sqrt{67}.$$

Итак, в $\triangle ACD$ мы знаем все стороны.

Опустим из A высоту на CD .

её длину необходимо найти. пусть $AO \perp CD$.

Обозначим $OD = x$, $AO = h$. тогда $CO = 4 - x$.

В $\triangle AOC$ и $\triangle AOD$ по теореме Пифагора:

$$\begin{cases} (4-x)^2 + h^2 = 63 \\ x^2 + h^2 = 67 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 8x + 16 + h^2 = 63 \\ x^2 + h^2 = 67 \end{cases}$$

Вычитая из 2 - 1.

$$8x - 16 = 4$$

$$8x = 20$$

$$x = 2,5$$

$$h^2 + (2,5)^2 = 67 \quad - \text{подставляем.}$$

$$h^2 = 60,75$$

$$h = 4,5\sqrt{3}$$

Ответ: $4,5\sqrt{3}$.

$$(y + \sqrt{x})(y - x^2)\sqrt{1-x} \leq 0$$

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 0, \text{ т.к. есть } \sqrt{x}. \\ x \leq 1, \text{ т.к. есть } \sqrt{1-x} \end{array} \right\} \Rightarrow x \in [0; 1].$$

1 случай: $x = 1$ — подходит. Но
целая $x = 1$ или её фрагменты никак
не влияют на площадь фигур. Их площадь = 0.

2 случай: $x \neq 1$. Тогда разделим на $\sqrt{1-x} > 0$.

$$(y + \sqrt{x})(y - x^2) \leq 0$$

Произведение меньше 0, значит ~~одно из~~ ~~одно из~~ ~~одно из~~
множители разных знаков.

$$1) \begin{cases} y + \sqrt{x} \leq 0 \\ y - x^2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y + \sqrt{x} \leq 0 \\ x^2 - y \leq 0 \end{cases} + 2$$

Сложим: $x^2 + \sqrt{x} \leq 0 \Rightarrow x = 0$. Очевидно
целая или фрагмент целой. Влияние на
площадь не оказывает.

$$2) \begin{cases} y + \sqrt{x} \geq 0 & (1) \\ y - x^2 \leq 0 & (2) \end{cases}$$

Рисунок неравенства (1) - (учетом $x \in [0; 1]$)

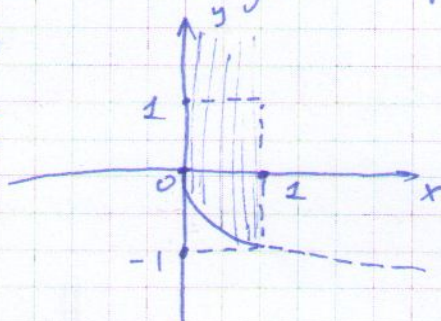
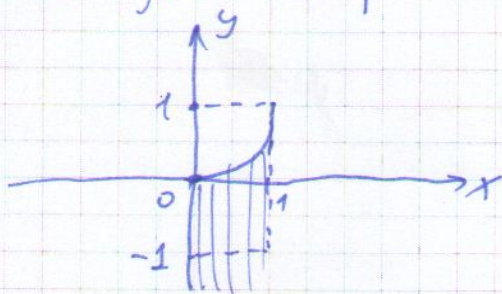
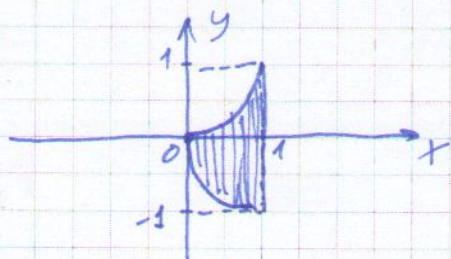


Рисунок второго нер-ва:



Вместе:



Нам дан квадрат. Закрашенной фигурой

Заметим, что если повернуть верхнюю часть кривой

($y \geq 0$) на 90° по часовой стрелке, то она
выглядит как раз на незакрашенный кусок снизу
($y < 0$). После поворота обе эти части заполняют
квадрат $1 \times 1 \Rightarrow S = 1$.

Ответ: 1.

§ 4.

~~Пусть~~ ~~св~~ ~~каждой~~.

Изобразим всё это в виде
орграфа.

Ребро идет из A в B , если

A подарил подарок B .

Пусть в каждую вершину пришло
 X ребер. Тогда степень ~~исхода~~ ^{входа} равна
 $N \cdot X$ N — кол-во вершин

Определимся со степенью исхода.

Докажем, что степени исхода у ~~каждой~~ вершины
распределяются как $0; 1; 2; \dots; N-1$.

~~Те~~ Лемма: $N-1$ — максимальная степень и
она присутствует.

Очевидно, что степени исхода больше $N-1$
быть не может — просто куда больше входить.
Теперь докажем, что ~~каждой~~ $N-1$ присутствует.

Пусть это не так, тогда макс. присутствующая
степень = $N-k$. $k \neq 1$. Тогда максима-
льное количество различных чисел это
 $0, 1, 2, \dots, N-k$, то есть $N-k+1$, а должно
быть N . Противоречие.

Значит, степени ~~исхода~~ исхода распределяются как
 $0, 1, 2, \dots, N-1$.

Сумма степеней исхода равна сумме степеней 9

Вх. №. Значит,

$$Nx = 0 + 1 + \dots + N-1 = \frac{N(N-1)}{2}$$

Сократим на $N \neq 0$

$$x = \frac{N-1}{2}, \text{ откуда}$$

$$N = 2x + 1.$$

Значит, если можно так сделать, то N - нечетное.

Теперь докажем, что если N - четное, то так сделать можно.

~~Лемма: Любое ~~нечетное~~ нечетное число $N \geq 9$ можно представить в виде суммы нечетного числа троек и пятерок.~~

~~Например, $17 = 3 + 3 + 3 + 3 + 5$~~

~~Докажем лемму по индукции:~~

~~База: $N = 9 = \underbrace{3+3+3}_{3 \text{ шт.}}$ - работает.~~

~~Переход: пусть ~~нечетное~~ можно разбить K .~~

~~Если разбиение числа K содержит 3, то заменим 3 на 5. K увеличится на 2 и~~

~~станет ~~нечетным~~ следующим четным. А кол-во слагаемых ~~нечетных~~ изменится. Если K не содержит 3, то оно~~

~~содержит хотя бы две пятерки.~~

~~Заменяем две пятерки на четыре ~~нечетных~~ тройки.~~

~~K увеличится на 2 и станет следующим~~

~~нечетным, а кол-во ~~нечетных~~ слагаемых увеличится на 2 и останется четным. З.З.~~

$\frac{1}{2} \times 100 = 50\%$

и некоторых детей.

Расстояния вершин по кругу
прономеруем их от 0 до 2n:

A 10x10 grid with blue dots and handwritten numbers. The dots are located at (0,0), (1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6), (7,7), (8,8), and (9,9). The numbers are written in blue ink: '0' at (0,9), '1' at (8,1), '2' at (9,5), and '3' at (7,9).

Будем проводить ребра по следующему правилу: из точки с номером k идут стрелки ко всем, кроме $\{k, k-1, k-2, \dots, N-k+1\}$.

Пример к берется по модулю N .
Например, если N (кол-во вершин) = 9,

28. То от вершины с номером $K=6$,
выходят ребра ко все вершины, кроме
 $\{ \cancel{6}, \overset{5,4}{\cancel{7}}, \cancel{2}, \cancel{0}, \cancel{1}, \cancel{2} \}$.

Теперь докажем, что это работает:

~~В каждой вершине~~

Из каждой вершины, очевидно,
исходит разное число ребер.

Докажем, что приходит одинаковое.

Из вершины k выходит ровно
 k ребер.

~~Заметим, что каждая вершина~~

~~Заметим, что к каждой вершине~~

~~Заметим, что каждая вершина изотропна~~

Ровно $\frac{N-1}{2}$ раз. Это нетрудно проверить руками.

Значит остальные $(N-1) - \frac{N-1}{2}$ раз к ней проводится
ребра. А это $\frac{N-1}{2}$ фиксированное число.

А далее, из из соображений симметрии.
Ведь $(k-n) + n = k$.

Значит, $\frac{N-1}{2}$

$X = \sum_{N} k = \frac{N(N-1)}{2}$ фиксированное число,
которое однозначно задано для данного N .

~~И, кстати, сходится к X , который был~~
~~использован в первой части~~ т.т.т.