سید محمد مهدی مصطفوی -- پایه ی نهم

پاسخ برگ مرحله ی دوم المپیاد ریاضی فرمول وحدت ۲۰۱۸/۲۰۱۹

راه حل مساله ی ۱:

می دانیم که مثلث های موجود تنها متساوی الاضلاع هستند پس می توان آنها را بر اساس ضلعشان قسمت بندی کرد و هر کدام را جداگانه شمرد. البته در شمارش ما نباید حتما همه را دستی بشماریم. بلکه می توان مثلا مثلث هایی را که △ شکلی هستند را بشماریم و در ۲ ضرب کنیم تا مثلث های ◁ شکلی هم حساب شوند.

طول ضلع	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
تعداد	۱۲۰	۱۱۴	۱۰۴	۹۰	۷۲	۵۶	۴۲	۳۰	۲۰	۱۲	۶	۲

از آنجا که مثلث های شمارش شده هیچ اشتراکی با یکدیگر ندارند می توان آنها را با هم جمع کرد تا تعداد کل مثلث ها به دست آید.

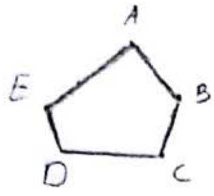
$۱۲۰ + ۱۱۴ + ۱۰۴ + ۹۰ + ۷۲ + ۵۶ + ۴۲ + ۳۰ + ۲۰ + ۱۲ + ۶ + ۲ = ۶۶۸$

سید محمد مهدی مصطفوی - پایه ی نهم

پاسخ برگ مرحله ی دوم المپیاد ریاضی فرمول وحدت ۲۰۱۸/۲۰۱۹

راه حل مساله ی ۲ :

می دانیم که مجموع زوایای یک ۵ ضلعی برابر است با : $(5-2)\times 180 = 540^\circ$



از آنجا که در مسئله ما، تمام زوایای ۵ ضلعی به جز زاویه A باهم برابرند می‌توان هر زاویه را به دست آورد:

$$\frac{540-60}{5-1} = \frac{480}{4} = 120^\circ$$

حال شروع به حل مسئله می کنیم. ابتدا اضلاع AE را از طرف E و CD را از طرف D امتداد می دهیم تا مثلث $E\hat{D}F$ تشکیل شود، پس اضلاع AB را از طرف B و CD را از طرف C امتداد می دهیم تا مثلث $B\hat{C}G$ تشکیل شود.

$$\left.\begin{array}{l}\hat{E}_1+\hat{E}_2=180\\ E_1=120\end{array}\right\} \Rightarrow \hat{E}_2=60$$

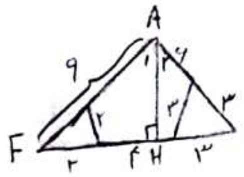
$$\left.\begin{array}{l}\hat{D}_1+\hat{D}_2=180\\ D_1=120\end{array}\right\} \Rightarrow D_2=60$$

$$\left.\begin{array}{l}\hat{E}_2=60\\ \hat{E}_2+\hat{D}_2+\hat{F}=180\\ D_2=60\end{array}\right\} \Rightarrow \hat{F}=180-120=60^\circ$$

$$\left.\begin{array}{l}\hat{F}=60^\circ\\ \hat{F}+\hat{A}+\hat{G}=180^\circ\\ \hat{A}=180^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow G=60 \Rightarrow$$ $\hat{AFG}$ متساوی الاضلاع است.

$$\Rightarrow AF=AG=FG \Rightarrow 7+x=6+y=4+x+y$$

$$7+x=4+x+y \qquad 6+y=4+x+y$$
$$7=4+y \qquad 6=4+x$$
$$y=3 \qquad x=2$$



$$\left.\begin{array}{l}\hat{A}_1+\hat{F}+\hat{H}=180\\ \hat{F}=60\\ \hat{H}=90\end{array}\right\} \Rightarrow \hat{A}_1=30$$

$$\sin 30 = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{FH}{AF} = \frac{FH}{9} = \frac{1}{2} \Rightarrow FH=4.5$$

$$AH=\sqrt{AF^2-FH^2}=\sqrt{81-20.25}=\sqrt{60.75} \Rightarrow \boxed{AH=\sqrt{60.75}}$$

Formula of Unity Olympiad Secretariat in

WWW.MathSymbol.ir

سید محمد مهدی مصطفوی - پایه نهم

پاسخ برگ مرحله ی دوم المپیاد ریاضی فرمول وحدت ۲۰۱۸/۲۰۱۹

راه حل مساله ی ۳:

می دانیم که $0 \leqslant x \leqslant 1$ است. زیرا اگر $1 < x$ باشد، $1-x$ منفی خواهد شد و زیر رادیکال منفی می شود. همچنین اگر $x < 0$ باشد، درباره عبارت $\sqrt{x}$ مشکل خواهد داشت که زیر رادیکال منفی است.

برای حل این سؤال دو حالت وجود دارد:

۱- $(y+\sqrt{x})(y-x^2)\sqrt{1-x} = 0$ باشد که خود ۳ حالت می تواند داشته باشد.

$$(y+\sqrt{x})(y-x^2)\sqrt{1-x}=0 \begin{cases} ① \; y+\sqrt{x}=0 \Rightarrow y=-\sqrt{x} \\ ② \; y-x^2=0 \Rightarrow y=x^2 \\ ③ \; \sqrt{1-x}=0 \Rightarrow 1-x=0 \Rightarrow x=1 \end{cases}$$

۲- $(y+\sqrt{x})(y-x^2)\sqrt{1-x} < 0$ باشد که خود ۲ حالت دارد. یا $y+\sqrt{x}$ منفی و $y-x^2$ مثبت است، یا $y+\sqrt{x}$ مثبت و $y-x^2$ منفی است ($\sqrt{1-x}$ نمی تواند باشد) که هر دو را بررسی می کنیم:

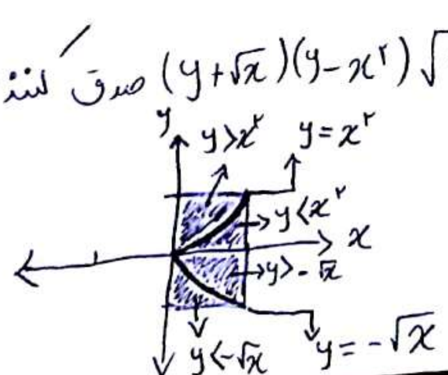
$$(y+\sqrt{x})(y-x^2)\sqrt{1-x} < 0 \begin{cases} \left.\begin{matrix} y+\sqrt{x} < 0 \Rightarrow y < -\sqrt{x} \\ y-x^2 > 0 \Rightarrow y > x^2 \end{matrix}\right\} \Leftarrow \text{هر دو شرط باید باهم صدق کنند} \\ \\ \left.\begin{matrix} y-x^2 < 0 \Rightarrow y < x^2 \\ y+\sqrt{x} > 0 \Rightarrow y > -\sqrt{x} \end{matrix}\right\} \Leftarrow \text{هر دو شرط باید باهم صدق کنند} \end{cases}$$

حال بعضی معادله ها و بعضی نامعادله ها را کنار هم می نویسیم تا مساحت مورد نظر به دست آید:

① $S_{y=x^2} + S_{y>x^2} + S_{y<x^2} = 1$ ① از آنجا که $0 \leqslant x \leqslant 1$ است، پس مساحت مورد نظر برابر ۱ واحد خواهد بود. (مساحت یک نمودار به علاوه مساحت بالای آن تا سقف ۱ به علاوه مساحت پایین آن تا کف ۰ که x آن بین ۰ و ۱ است.)

② $S_{y=-\sqrt{x}} + S_{y>-\sqrt{x}} + S_{y<-\sqrt{x}} = 1$ ② از آنجا که $0 \leqslant x \leqslant 1$ است، مساحت این قسمت نیز برابر ۱ واحد خواهد بود. (مساحت یک نمودار به علاوه مساحت بالای آن تا سقف ۰ به علاوه مساحت پایین آن تا کف ۱- که x آن بین ۰ و ۱ است.

پس مساحت نقاطی از صفحه مختصات که در نامعادله $(y+\sqrt{x})(y-x^2)\sqrt{1-x} \leqslant 0$ صدق کنند برابر است با: $\boxed{1+1=2 \text{ واحد}}$



سید محمد مهدی مصطفوی - پایه نهم

پاسخ برگ مرحله ی دوم المپیاد ریاضی فرمول وحدت ۲۰۱۸/۲۰۱۹

راه حل مساله ی ۴ :

از آنجا که هر کودک نمی‌تواند بیش از یک کادو به کودکی دیگر بدهد و کسی نیز به خودش هدیه نمی‌دهد، حداکثر تعداد کادویی که یک کودک می‌تواند بدهد برابر خواهد بود با: $N-1$

حال از آنجا که تعداد کادوهایی که یک کودک داده با هیچ کودک دیگری برابر نیست، حتما یک کودک ۰ کادو آورده و تعداد کادو هایی که هدیه داده شده برابر خواهد بود با:

$$0+1+2+\cdots+(N-2)+(N-1)=\frac{(N-1)((N-1)+1)}{2}=\frac{(N-1)(N)}{2}$$

حال از آنجا که به هر کودک تعداد برابری کادو با دیگر افراد داده شده، تعداد کادو هایی که به یک فرد داده شده برابر است با:

$$\frac{\frac{(N-1)(N)}{2}}{N}=\frac{(N-1)\cancel{(N)}}{2\cancel{N}}=\frac{N-1}{2}$$

می دانیم که تعداد کادو های گرفته شده توسط یک فرد همواره عددی طبیعی است و نمی تواند اعشاری یا منفی باشد. پس $\frac{N-1}{2}$ باید عدد طبیعی باشد. پس حتما $N-1$ عددی زوج و N عددی فرد است. زیرا در غیر اینصورت تعداد کادو هایی که به یک فرد داده می شد، عددی طبیعی نبود و مخالف فرض ما بود. پس N برابر است با مجموعهٔ اعداد طبیعی فرد بزرگتر از ۱ .

$$N=\{2x-1 \mid x\in N , x>1\}$$

WWW.MathSymbol.ir

سید محمد مهدی مصطفوی - پایه نهم

پاسخ برگ مرحله ی دوم المپیاد ریاضی فرمول وحدت ۲۰۱۸/۲۰۱۹

راه حل مساله ی ۵ :

در ابتدا معادله ی سوال را به گونه ای دیگر می نویسیم.

$$m^3 = n^3 + 13n - 273$$

$$m^3 = n^3 + 13(n-21)$$

در واقع سوال از ما دو عدد مکعب کامل طبیعی می خواهد که تفاضلشان مضرب ۱۳ باشد. با کمی حدس و آزمایش به این نتیجه می رسیم که: $n=8 \Rightarrow n^3+13(n-21) = 512+13(-13) = 512-169 = 343 = 7^3$

پس یکی از اعداد مکعب وار ۸ است.

حال ثابت می کنیم هیچ عدد مکعب وار دیگری وجود ندارد.

۱. برای $n<8$. برای این سری اعداد می توان به صورت دستی محاسبه کرده

۲. برای $8<n\leq 21$. در این سری اعداد فاصله ی بین دو عدد مکعب کامل متوالی در حال افزایش است، اما عبارت $13(n-21)$ در حال کاهش است. پس در این مجموعه اعداد داشتن عددی مکعب وار محال است.

$$(n+1)^3 = n^3 + 13(n-21)$$

$$\underbrace{(n+1)^3 - n^3}_{\text{افزایش}} \neq \underbrace{13(n-21)}_{\text{کاهش}}$$

۳. برای $21<n$. در این دسته از اعداد نیز اختلاف دو عدد مکعب کامل متوالی با مقداری بیش از ۱۵۰۰ واحد در حال افزایش است. اما مقدار سمت راست تساوی یعنی $13(n-21)$ با ۱۳ واحد در حال افزایش است. پس با افزایش n هرگز دو طرف تساوی برابر نخواهند شد.

$$\underbrace{(n+1)^3 - n^3}_{\text{افزایش با بیش از ۱۵۰۰ واحد}} \neq \underbrace{13(n-21)}_{\text{افزایش با ۱۳ واحد}}$$

پس در نهایت مجموع اعداد مکعب وار برابر است با: $\boxed{8}$