№3

Найдём ОДЗ данного неравенства

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ 1-x \geq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ x \leq 1; \end{cases}$$

$0 \leq x \leq 1.$

Так как $\sqrt{1-x} \geq 0$ при любых допустимых x из ОДЗ, то исходное неравенство равносильно следующему:

$(y+\sqrt{x})(y-x^2) \leq 0.$

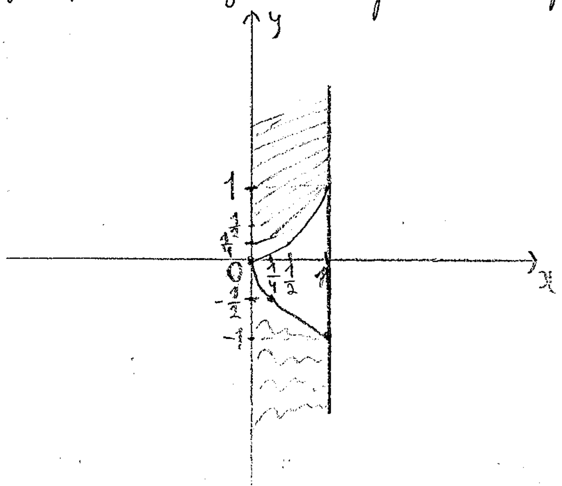
Возможны 2 случая:

1 сл.

$$\begin{cases} y+\sqrt{x} \leq 0, \\ y-x^2 \geq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \leq -\sqrt{x}, \\ y \geq x^2. \end{cases}$$

Изобразим решения данных неравенств графически:



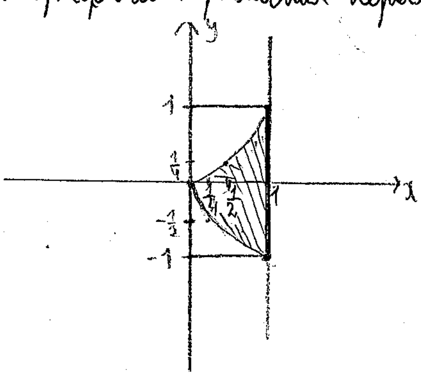
Решением системы является только точка $O(0;0)$.

2 сл.

$$\begin{cases} y+\sqrt{x} \geq 0, \\ y-x^2 \leq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \geq -\sqrt{x}, \\ y \leq x^2. \end{cases}$$

Изобразим графически решения неравенств этой системы.

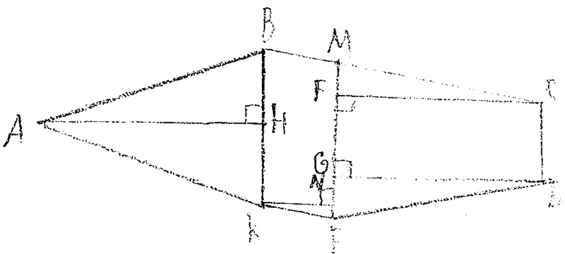


Решением данной системы является множество всех точек, принадлежащих заштрихованной части плоскости.
Так как решением первой системы являлась только точка O(0;0), то решение исходного неравенства совпадает с решением системы 2-го случая.
Чтобы найти площадь заштрихованной фигуры, можно часть заштрихованной фигуры, которая находится в I четверти повернуть вправо на 90°, потом сдвинуть влево вдоль оси Ox на 1 единицу и сдвинуть вниз вдоль оси Oy на 1 единицу, тогда она совместится с незаштрихованной частью квадрата со стороной, равной 1, который находится в IV четверти.
Таким образом площадь множества точек, удовлетворяющих исходному неравенству, равна площади квадрата со стороной, равной 1.

$S = 1^2 = 1$

Ответ: 1.

№2



Дано: ABCDE – выпуклый пятиугольник, $\angle A = 60^\circ$; $\angle B = \angle C = \angle D = \angle E$. $AB = 6$, $AE = 7$, $CD = 4$.
Найти: $d(A, CD)$

Решение:

По формуле суммы углов выпуклого многоугольника найдём сумму всех углов выпуклого пятиугольника. $S = 180^\circ(5-2) = 180^\circ \cdot 3 = 540^\circ$. Так как $\angle A = 60^\circ$, а остальные углы пятиугольника равны, то $\angle B = \angle C = \angle D = \angle E = \frac{540^\circ - 60^\circ}{4} = 120^\circ$

1) проведём $ME \parallel CD$. Тогда MCDE – равнобедренная трапеция. $\angle EDC = \angle MCD = 120^\circ$; $\angle MED = \angle EMC = 60^\circ$.

2) Отложим отрезок $AK = AB = 6$, проведём BK. Тогда $\triangle ABK$ – равносторонний, $\angle KAB = \angle ABK = \angle BKA = 60^\circ$. $AB = BK = AK = 6$.

В получившемся таким образом четырёхугольнике KBME имеем:
$\angle KBM = \angle KEM = 60^\circ$, $\angle BKE = \angle BME = 120^\circ$,
значит KBME – параллелограмм.
$KE = BM = AE - AK = 7 - 6 = 1$
$BK = ME = 6$.

Расстоянием от точки A до прямой CD будет сумма высот треугольника, параллелограмма и трапеции
$d(A; CD) = AH + KN + CF$
$\triangle AHK$; $\angle AHK = 90^\circ$, $\angle AKH = 60^\circ$, $AH = \frac{\sqrt{3}}{2} AK = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 6 = 3\sqrt{3}$
$\triangle KNE$, $\angle KNE = 90^\circ$, $\angle KEN = 60^\circ$, $KN = \frac{\sqrt{3}}{2} KE = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$
$\triangle MFC$; $\angle CFM = 90^\circ$; $\angle FMC = 60^\circ$, $FC = \frac{\sqrt{3}}{2} MC$.
$MF = NGE = \frac{ME - CD}{2} = \frac{6-4}{2} = 1$, тогда $MC = 2$ (как катет, лежащий напротив угла в 30°).
$FC = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 2 = \sqrt{3}$.

$d(A, CD) = 3\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3} = 4\sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{8\sqrt{3} + \sqrt{3}}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{2}$

Ответ: $\frac{9\sqrt{3}}{2}$.

№5

Для того, чтобы являться кубом натурального числа n выражение $n^3+13n-273$ должно принимать значение больше нуля. Это возможно при $n \geq 6$.

Рассмотрим следующие случаи:

1) Если при некотором натуральном n значение выражения $n^3+13n-273$ равно кубу этого же натурального числа n.

$n^3+13n-273=n^3$

$13n=273$

$n=\frac{273}{13}=21$

2) Если при некотором натуральном n значение выражения $n^3+13n-273$ равно кубу натурального числа $(n-1)$.

$n^3+13n-273=(n-1)^3$

$n^3+13n-273=n^3-3n^2+3n-1$

$3n^2+10n-272=0$

$\frac{D}{4}=25+3\cdot272=\cancel{\frac{-5+29}{3}}=\cancel{\frac{24}{3}}=841$

$n_1=\frac{-5+\sqrt{841}}{3}=\frac{-5+29}{3}=\frac{24}{3}=8$

$n_2=\frac{-5-\sqrt{841}}{3}=\frac{-5-29}{3}=-\frac{34}{3}<0$ (не подходит)

3) Если рассматривать случаи, что при некоторых натуральных n значения выражения $n^3+13n-273$ равно кубу натуральных чисел

$(n-2),(n-3),(n+1),(n+2),(n+3),\ldots,$

т.е не последовательным числам,

то уравнение не решается в натуральных числах.

Значит кубоватыми являются числа 8 и 21. $21+8=29$

Ответ: 29.

№4

При $N=2$ невозможно, так как каждый должен получить подарков поровну, но подарить разное количество, но чтобы получить одинаковое количество, они должны подарить одинаковое количество, что противоречит условию задачи.

При $N=3$ такая ситуация возможна. Пример в виде таблицы.

N	1-ый ребенок	2-ой ребёнок	3-ий ребенок
подарил подарков	0	1	2
получил подарков	1 от 3-го	1 от 3-го	1 от 2-го

Каждый подарил разное количество: 0, 1, 2, но каждый получил одинаковое количество — по 1 подарку.

Далее, принимая $N=4$, $N=6$, ... где N – чётное число, убеждаемся, что такая ситуация невозможна, так как наибольшее количество подаренных подарков одним ребёнком должно быть на 1 меньше количества всех детей, а общее количество подарков не будет делиться нацело на количество детей.

Если N – нечётное, такая ситуация возможна.

При $N=5$

N	1-ый ребенок	2-ой ребенок	3-ий ребенок	4-ый ребенок	5-ый ребёнок
Подарил подарков	0	1	2	3	4
Получил подарков	1 от 5-го 1 от 3-го	1 от 5-го 1 от 4-го	1 от 5-го 1 от 4-го	1 от 5-го 1 от 3-го	1 от 2-го 1 от 4-го

Каждый подарил разное количество: 0, 1, 2, 3, 4, но получил одинаковое количество – по 2 подарка.

При $N=7$

N	1-ый ребенок	2-ой ребенок	3-ий ребенок	4-ый ребенок	5-ый ребенок	6-ой ребёнок	7-ой ребёнок
Подарил подарков	0	1	2	3	4	5	6
Получил подарков	1 от 7-го 1 от 4-го 1 от 3-го	1 от 7-го 1 от 6-го 1 от 5-го	1 от 7-го 1 от 6-го 1 от 4-го	1 от 7-го 1 от 6-го 1 от 5-го	1 от 7-го 1 от 6-го 1 от 4-го	1 от 7-го 1 от 5-го 1 от 3-го	1 от 6-го 1 от 5-го 1 от 2-го

Каждый подарил разное количество: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, и получил одинаковое количество – по 3 подарка.

Ответ: при N – нечётном.

№1

Ответ: 930 треугольников.