№ 3.

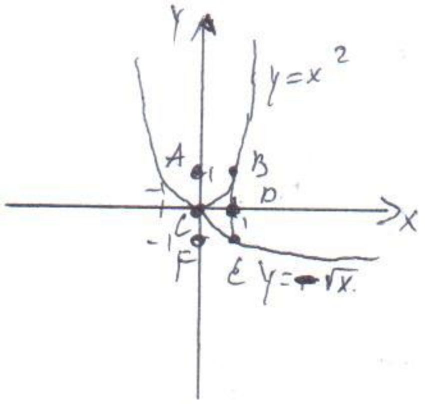
$(y+\sqrt{x})(y-x^2)\sqrt{1-x} \le 0 \quad x \le 1$ и $x \ge 0$.

$\Downarrow$

$(y+\sqrt{x})(y-x^2) \le 0$, если $y+\sqrt{x}<0$, то $y<0$ и $y-x^2<0$, и

$(y+\sqrt{x})(y-x^2)>0$, $\Rightarrow$ $y+\sqrt{x} \ge 0$ а $y-x^2 \le 0$ и $x \in [0;1]$

~~$x=y^2$, $y=x^2$~~ $y \ge -\sqrt{x}$ и $y \le x^2$



искомое ~~...~~ это фигура CBE, заметим, что $S_{ABC}=CFE$ с точностью до поворота, т.к. в одном случае $|y|=|x^2|$ а в другом $|x|=|y^2|$ $\Rightarrow$ $S_{CBE}=S_{ABDC}=1$

Ответ: $S=1$

№ 4

Т.к. каждый дарил $<n$ и все дарили ~~...~~ разное кол-во подарков, то дарили $0; 1; 2; \ldots (n-1)$ подарки. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ у каждого на руках ~~...~~ стало $\dfrac{\frac{(n-1)\cdot n}{2}}{n} = \frac{n-1}{2}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ n - нечетно.

Для неч. n возможно. Построение:

база $n=3$ ~~...~~ 1-ый подарил 2-ому и 3-ему, а 2-ой первому.

ход индукции

если можно для n, то и для $n+2$ можно: добавляем 2 человека к исходной ситуации, 1 из них дарит $n+1$ подарок всем, а второй ничего, а остальные n додаривают каждый по 1 подарку так, что $\frac{n-1}{2}$ идет ~~к первому~~, ко второму, а $\frac{n+1}{2}$ к первому.

Ответ: при N - нечетном, $N>1$.

№ 1

Есть ориентированные так: ▷, а есть ориентированные так: ◁. Их поровну. Ориент. ▷ в треугольнике со стороной 12 — 286, но т.к. в „концах" треугольника нет разметки, то нужно вычесть $3 \cdot 10 = 30 \Rightarrow$ всего треугольников $(286-30) \cdot 2 = 256 \cdot 2 = 512$

Ответ: 512 треугольников

№ 2

Дано:

$ABCDE$ — пятиугольник.

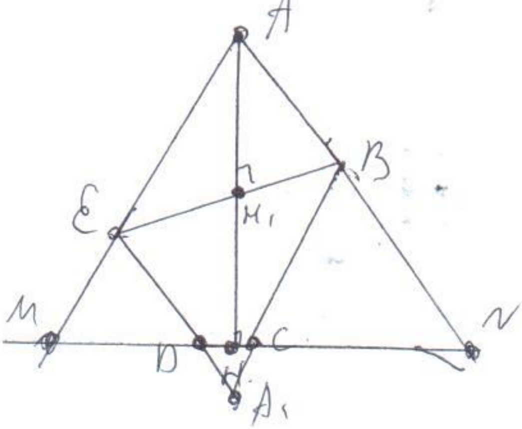
$\angle A = 60^\circ$

$\angle B = \angle C = \angle D = \angle E$

$AB = 6$, $CD = 4$, $EA = 7$.

Найти:

AH?



решение:

$\cancel{BE = \sqrt{AB^2 + AE^2 - 2\cos A \cdot AB \cdot AE} = \sqrt{36+49 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 7} = \sqrt{36+7} = \sqrt{43}}$,

$\cancel{S_{ABE} = \frac{AE \cdot AB \cdot \sin A}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 6 \cdot 7 = \frac{21\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AH_1 = \frac{2 S_{ABE}}{BE} = \frac{21\sqrt{3}}{\sqrt{43}}}$; $\angle B = \frac{540^\circ - 60^\circ}{4} = 120^\circ$

$\angle ABE = 120^\circ - \angle EBC = \angle AEB$, аналогично $\angle ABE = \angle BED \Rightarrow AB \parallel ED$ и $BC \parallel AE$, тогда $\angle EA_1B = \angle EAB = 60^\circ$, а т.к. $\angle EDC = 120^\circ = \angle DCB \Rightarrow \angle CDA_1 = \angle DCA_1 = 60^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle A_1DC$ — равносторонний $\Rightarrow A_1D = 4 = A_1C = DC \Rightarrow ED = AB - DC = 6 - 4 = 2$, $BC = AE - DC = 3$. $\Rightarrow$, т.к. $\angle MED = 120^\circ - 120^\circ = \angle CBN = 60^\circ$, а $\angle EDM = 60^\circ = \angle CDA_1 = \angle DCA_1 = \angle BCN$, то $\triangle MED$ и $\triangle CBN$ — прав. $\Rightarrow BN = BC = 3$, $ME = ED = 2 \Rightarrow$ т.к. $\angle A = \angle M = \angle N = 60^\circ$ и $AN = 3 + 6 = 9$, но $AH_1 = AN \cdot \sin 60^\circ = \frac{9 \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{2}$

Ответ: $AH_1 = \frac{9\sqrt{3}}{2}$.

№5

~~n^3+13n~~ $n^3+13n-273$ – положительно при $n\geq 6$,

т.к. при $n=5$ $n^3+13n-273=125+65-273=190-273=-83$.

при $n>8$ и $n<21$ $n^3+13n-273<n^3$, но $n^3+13n-273>(n-1)^3$,

т.к. $13n<273$ и $-3n^2+3n-1<13n-273$, т.к. при $n=9$

~~9~~ $-3n^2+3n-1=-243+27-1=-217$, и $13n-273=117-273=-156$

~~Все это~~ при $n>21$ $n^3+13n-273>n^3$ и $n^3+13n-273<(n+1)^3$,

т.к. $13n>273$ и при $n=22$ $13n-273=13$, и $3n^2+3n+1=$
$=484\cdot 3+66+1>13$. Все рассуждения основывались на том, что, как функции они возрастающие.

возможные n это $21; 6; 7; 8$.

при $n=21$: $21^3+21\cdot 13-21\cdot 13=21^3 \Rightarrow n=21$ подходит

при $n=8$: $8^3+8\cdot 13-21\cdot 13=512-169=343=7^3 \Rightarrow n=8$ подходит

при $n=7$: $7^3+7\cdot 13-21\cdot 13=343-182=161$ – не куб $\Rightarrow n=7$ не подходит.

при $n=6$: $6^3+6\cdot 13-21\cdot 13=216-195=21$ – не куб $\Rightarrow n=6$ не подходит

$21+8=29$.

Ответ: 29.