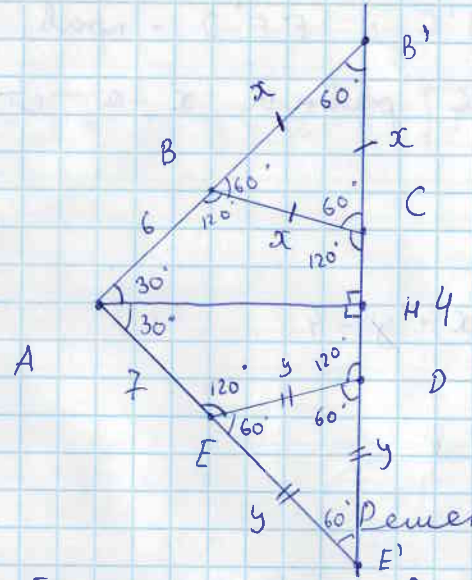
№ 2



Дано: $ABCDE$ - выпуклый 5-угольник, $\angle A = 60^\circ$, $\angle B = \angle C = \angle D = \angle E$, $AB = 6$, $CD = 4$, $EA = 7$.

Найти: расст. от A до CD

Решение:

1) $\Sigma \angle$ 5-угольника $= 3 \cdot 180^\circ = 540^\circ$

$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E = 540^\circ$

$\Downarrow$

$\angle B = \angle C = \angle D = \angle E = 120^\circ$

2) расст. от A до $CD = AH$ $\left(\begin{matrix} AH \perp CD \\ H \in CD \end{matrix}\right)$.

3) $\Sigma \angle$ 4-угольника $= 2 \cdot 180^\circ = 360^\circ$

$\Downarrow$

$\angle BAH = \angle EAH = 30^\circ$.

4) $AB \cap CD = B'$

$AE \cap CD = E'$

5) $\angle B'BC = \angle B'CB = \angle E'ED = \angle E'DE = 60^\circ$

(как смежн. $\angle$ с $\angle = 120^\circ$)

$\Sigma \angle \Delta = 180^\circ \Rightarrow \angle BB'C = \angle EE'H = 60^\circ$

Тогда $AB'E'$, $BB'C$ и $EE'D$ - прав. $\triangle$.

6) Пусть ст. $\triangle BB'C$ равны x, а ст. $\triangle EE'D = y$.

Тогда:

$x + 6 = y + 7 = x + y + 4$

$x = 3$

$y = 2$

~~7) Т. Пифагора:~~

7) $B'H = \frac{AB'}{2}$ и $E'H = \frac{AE'}{2}$ (по св. прямоуг. $\triangle$)

$x + CH = \frac{x + AB}{2}$

$6 + 2CH = 3 + 6$

$2CH = 3$

$CH = 1,5$, $DH = 2,5$

8) Т. Пифагора (для $\triangle AHB'$ или $\triangle AHE'$):

$AH^2 + 4,5^2 = 9^2$

$AH^2 = 4,5 \cdot 13,5 = \frac{9}{2} \cdot \frac{27}{2} = \frac{9^2}{2^2} \cdot 3$

$AH = 4,5\sqrt{3}$

Ответ: $4,5\sqrt{3}$.

№3

$(y + \sqrt{x}) \cdot (y - x^2) \cdot \sqrt{1 - x} \leq 0$

1) ОДЗ:

$x \geq 0$ $(\sqrt{x})$ и $1 - x \geq 0$ $(\sqrt{1-x})$

$x \leq 1$

$x = [0; 1]$

2) $\sqrt{1 - x} \geq 0$

$\Downarrow$

$(y + \sqrt{x})(y - x^2) \leq 0$

$\begin{cases} y + \sqrt{x} \leq 0 \\ y - x^2 \geq 0 \end{cases}$

$\begin{cases} y \leq -\sqrt{x} \\ y \geq x^2 \end{cases}$

$x^2 \leq y \leq -\sqrt{x}$

$x^2 \leq -\sqrt{x}$

$x^2 \geq 0$ $-\sqrt{x} \leq 0$

$x = 0$, $y = 0$

$\begin{cases} y + \sqrt{x} \geq 0 \\ y - x^2 \leq 0 \end{cases}$

$\begin{cases} y \geq -\sqrt{x} \\ y \leq x^2 \end{cases}$

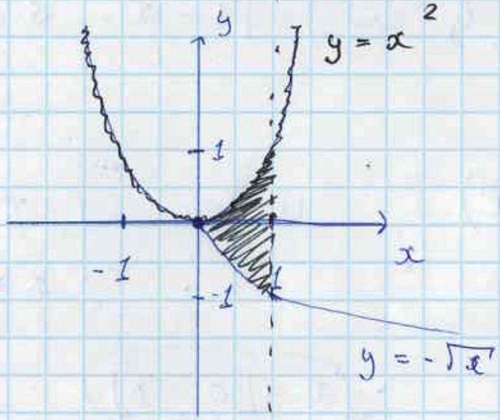
$-\sqrt{x} \leq y \leq x^2$

$-\sqrt{x} \leq x^2$

$x^2 \geq 0$ $-\sqrt{x} \leq 0$

$x = [0; 1]$

3) Построим график (схематичн.):



~~Рассмотрим получивш. фигуру:~~

~~$\frac{1}{4}$ окр-ти с $R = 1$ S_1~~

~~$\frac{1}{4}$ окр-ти с $R = 1$ S_2~~

~~$S = \left(1^2 - \frac{\pi r^2}{4}\right) + \frac{\pi r^2}{4} = 1$~~

~~Ответ: 1.~~

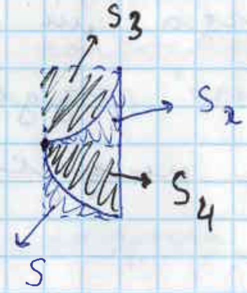
~~$S_1 = S_2 = S$, т.к. $y = \sqrt{x}$~~

~~$y^2 = |x|$~~

~~$y = -\sqrt{x} \to S_2$~~

~~$x = -\sqrt{y} \to$~~

4) Рассмотрим получивш. фигуру:



$S_1 = S_2 = S_1'$ и $S_3 = S_4 = S_2'$

т.к. наши функции в диапазоне $[0; 1]$ по x являются одинаковыми (но расп. отн. разных осей)

$S = S_1' + S_2' = 1$

Ответ: 1

№ 4

1) Т.к. всего N детей и все дарили разное кол-во подарков, то кол-ва подарков у детей: 0, 1, 2, 3, ..., N - 2, N - 1.

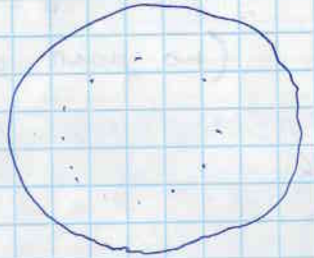
2) Всего подарков: $\frac{0 + N-1}{2} \cdot N = \frac{N-1}{2} \cdot N$

3) Все получили одинак. кол-во подарков, у каждого по: $\frac{\frac{N-1}{2} \cdot N}{N} = \frac{N-1}{2}$ подарка.

Из этого следует, что N - нечётн.
4) Проверим, всегда ли при N-нечётн можно „правильно" раздать подарки методом мат. индукции:

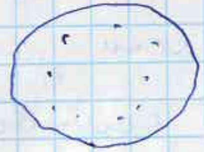
$N = 3$:

$N = 2k + 1$:



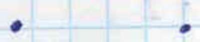
у каждого по k подарка

$N = 2k + 3$:



у каждого должно быть по $k + 1$ подарка

свободн. подарков:



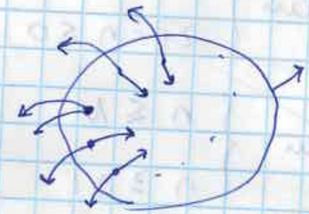
$2k + 1 + 2k + 2 =$

$= 4k + 3$

дадим каждому ребёнку из круга по 2 доп. подарка (из кол-ва свободн. подарков) и попросим подарить:

1) одного, который подарил всем в своём круге, двум новым детям
2) остальных, одному из круга, у которого не $k+1$,
а одному из новых, ~~так~~ 1.

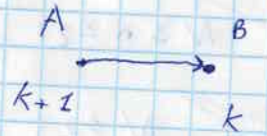
В итоге:



у всех $k + 1$

свободных подарков:

$4k + 3 - 2 \cdot (2k + 1) = 1$



Посл. свободн. подарок мы дадим А (у которого $k+1$) и попросим подарить В (у которого k), в итоге у всех будет $k+1$ подарков.

Значит это возм. для всех

N - нечётн.

Ответ: при N - нечётн.

№5

Пусть $n^3 + 13n - 273 = N^3$.

$n^3 - N^3 = 273 - 13n$

$(n - N)(n^2 + nN + N^2) = 13(21 - n)$

$n^2 + nN + N^2 \geq 0$

$13 \geq 0$

$\Downarrow$

$\begin{cases} n - N \geq 0 \\ 21 - n \geq 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} n - N \leq 0 \\ 21 - n \leq 0 \end{cases}$

$\begin{cases} n \geq N \\ n \leq 21 \end{cases}$ или $\begin{cases} n \leq N \\ n \geq 21 \end{cases}$

$N \leq n \leq 21$ $\quad$ $N \geq n \geq 21$

$N \leq 21$ $\quad$ $N \geq 21$