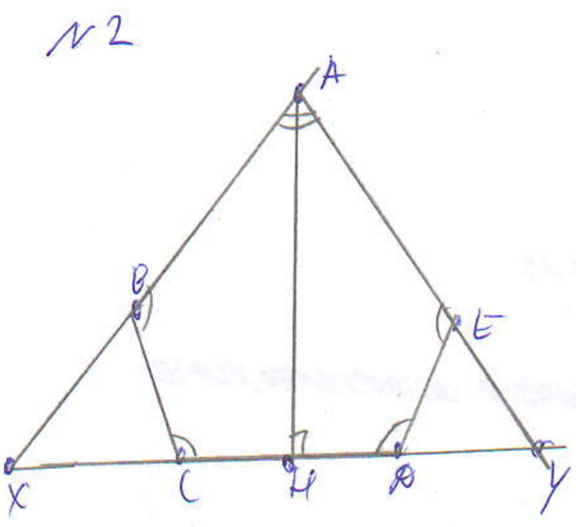
№2



Дано:
ABCDE – выпукл[illegible]
$\angle A = 60^\circ$.
все остальные угл[illegible]
равны между собо[illegible]
$EA = 7$, $CD = 4$, A[illegible]
Найти: расст[illegible]
от точки A до пр[illegible]
CD.

Решение:

1) Д.п. продлим AB, AE, CD за точки B, E, C и D.
$AB \cap CD = X$, $AE \cap CD = Y$.

2) Так как по условию $\angle ABC = \angle BCD = \angle CDE = \angle AED$, то
~~к~~ Пусть все эти углы равны α. Тогда $\frac{180^\circ \cdot 3 - \angle BAE}{4} = \alpha$
$\frac{540^\circ - 60^\circ}{4} = \alpha$. $\alpha = 120^\circ$. Тогда $\angle XBC = \angle BCX = \angle YDE = \angle DEY =$
$= 180^\circ - \alpha = 60^\circ$. Тогда $\angle EYD = \angle BXC = 180^\circ - 60^\circ - 60^\circ = 60^\circ$.
Тогда $\triangle AXY$ – равносторонний, так как $\angle AXY = \angle AYX = \angle XAY = 60$
Тогда ~~XB + BA~~ $AX = YA = XY$, и расстояние от A до прямой CD –
это высота AH в $\triangle AXY$.

3) Также $\triangle XBC$ и $\triangle DEY$ – равносторонние, так как $\angle BXC =$
$= \angle XBC = \angle BCX = 60^\circ$ и $\angle EDY = \angle EYD = \angle DEY = 60^\circ$. Тогда $EY = YD$ и $XC = X$[illegible]
Тогда $AB + XC = XC + CD + DY = AE + DY$.

$$\begin{cases} 6 + XC = XC + 4 + DY \\ 7 + DY = XC + 4 + DY \end{cases} \quad \begin{cases} XC = 3 \\ DY = 2 \end{cases}$$ Тогда $AX = XY = AY = 9$.

4) $S(AXY) = \frac{1}{2} AX \cdot AY \cdot \sin(60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 9$
$S(AXY) = AH \cdot XY \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot AH$
$\frac{1}{2} \cdot 9 \cdot AH = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 9$
$AH = \frac{9\sqrt{3}}{2}$

Ответ: $\frac{9\sqrt{3}}{2}$.

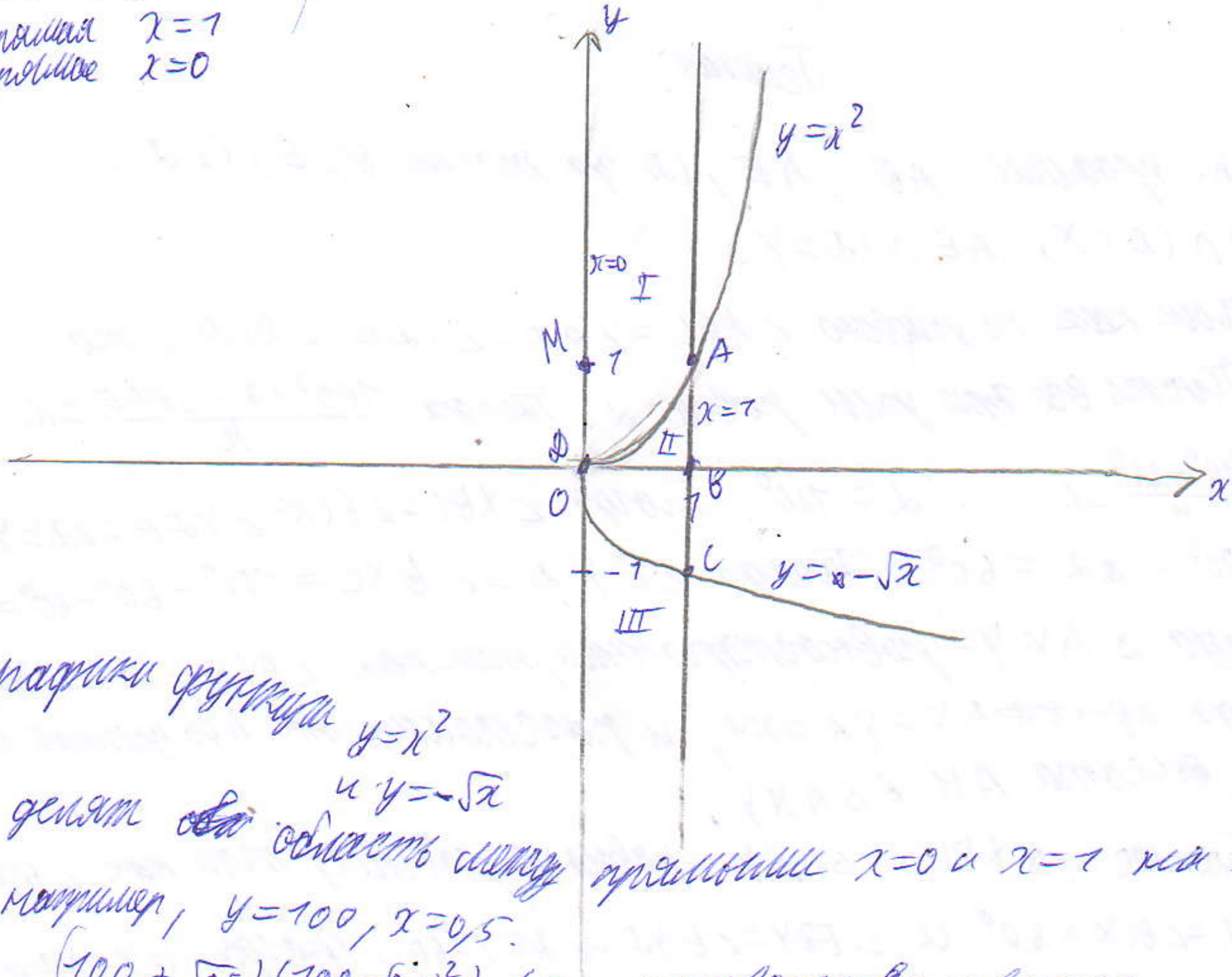
№3.

$(y+\sqrt{x})(y-x^2)\sqrt{1-x}\le 0.$ (1)

ОДЗ: $\begin{cases} x\ge 0 \\ 1-x\ge 0 \end{cases}$ $0\le x\le 1$

$\left[\begin{array}{l} 1-x=0 \\ (y+\sqrt{x})(y-x^2)\le 0 \end{array}\right.$, т.к. $\sqrt{1-x}>0$ при $1-x\neq 0$

$f(x)$: $y=-\sqrt{x}$.
$g(x)$: $y=x^2$
прямая $x=1$
прямая $x=0$
— графики, ограничивающие множество точек.



графики функций $y=x^2$ и $y=-\sqrt{x}$ делят ~~обл~~ область между прямыми $x=0$ и $x=1$ на 3 части.

I) например, $y=100$, $x=0{,}5$.

$(100+\sqrt{0{,}5})(100-(0{,}5)^2)\le 0$ — неравенство неверное, значит, I часть ~~не подходит~~ не является решением неравенства (1)

II) например, $y=0$, $x=0{,}25$.

$(0+0{,}5)(0-(0{,}25)^2)\le 0$ — верное, неравенство, значит, II часть ~~подходит~~ является решением неравенства (1).

III) например, $y=-100$, $x=0{,}25$.

$(-100+0{,}5)(-100-(0{,}25)^2)\le 0$ — неравенство неверно, значит, III часть не является решением неравенства (1).

сами графики функций при $1 \ge x \ge 0$ и прямая $x = 1$ являются решениями неравенства (1).

Тогда площадь множества точек на координатной плоскости, удовлетворяющих неравенству (1) — S это $S(ABD) + S(DBC)$

$S = S(ABD) + S(DBC)$. $D(0;0)$, $B(0;1)$, $A(1;1)$, $C(1;-1)$.
$M(0;1)$

Так как $f(x)$: $x = y^2$ при $y \le 0$

и $g(x)$: $y = x^2$ при $x \ge 0$, то $S(DMA) = S(DCB)$.

$S(ABD) = S(MABD) - S(DMA) = 1 - S(DCB)$.

$S = 1 - S(DCB) + S(DBC) = 1$.

Ответ: 1.

№4

Так как было N детей, каждый мог подарить не более 1 подарка ~~всем остальным~~ каждому из ~~остальных~~ остальных, и все подарили разное количество подарков, то 1 человек подарил 0 подарков, 1 человек — 1 подарок, 1 человек — 2 подарка и так далее: 1 человек — $N-1$ подарок. Тогда сумма всех подарков подаренных — это $S = \cancel{\frac{(N-1)N}{2}}\ 0+1+2+3+\ldots+N-1 = \frac{(N-1)N}{2} = \frac{N^2-N}{2}$. Так как всего было N детей и все получили поровну подарков, то каждый получил ровно $\frac{S}{N} = \frac{N-1}{2}$ подарков. Значит, если N — чётное число, то это невозможно.

Если N — нечётное число, то это возможно:
0 - не подарил подарок, 1 - подарил подарок.

	1	2	3	4	5	6	7	8	...	N-1	N
N	0	0	0	0	0	0	0	0	0...0	0	0
1	1	0	0	0	0	0	0	0	.....	0	0
N-1	0	1	1	1	1	1	1	1	.....	1	1
2	1	1	0	0	0	0	0	0	.....	0	0
N-2	0	0	1	1	1	1	1	1	.....	1	1

и так далее до $\frac{N-1}{2}$ и $\frac{N+1}{2}$

	1	2	3	4	...	$\frac{N-1}{2}$	$\frac{N+1}{2}$	$\frac{N+1}{2}+1$	$\frac{N+1}{2}+2$	...	N
$\frac{N-1}{2}$	1	1	1	1	...	1	0	0	0	...	0
$\frac{N+1}{2}$	0	0	0	0	...	0	1	1	1	...	1

~~Тогда после каждого нечётного~~

N-ный человек подарит 0 подарков, остальные — столько, каков их номер (1 — подарит 1; 5 — подарит 5; N-3 — подарит N-3)

Тогда после N-ного человека у всех 0 подарков, и после каждого нечётного — поровну, т.к. $\frac{N-k}{2}+\frac{N+k}{2}=\frac{2N}{2}=N$

№5.

$n^3+13n-273 \vee (n+3)^3$

$n^3+13n-273 \vee n^3+9n^2+27n+27$

$0 \vee 9n^2+14n+27+273.$ т.к. $n>0$, то $9n^2+14n+27+273>0$,

значит, $n^3+13n-273<(n+3)^3$.

$n^3+13n-273 \vee (n+2)^3$

$n^3+13n-273 \vee n^3+6n^2+12n+8$

6 $0 \vee 6n^2-n+8+273.$

$0 \vee n(6n-1)+281$ т.к. $n\geq 1$ то $6n-1\geq 5$

$n(6n-1)\geq 5$

$n(6n-1)+281>0$,

значит, $n^3+13n-273<(n+2)^3$

$n^3+13n-273 \vee (n+1)^3$

$n^3+13n-273 \vee n^3+3n^2+3n+1$

$0 \vee 3n^2-10n+272$

$f(n)=3n^2-10n+272.$ — график — парабола, ветви вверх.

$D=100-4\cdot 3\cdot 272<0$, значит, корней нет. значит, $f(n)>0$ при $\forall n\in N$.

значит, $n^3+13n-273<(n+1)^3$

I если $n>21$, то ~~$n^3+13n-27$~~

$13n>273$

$13n-273>0$

$n^3+13n-273>n^3.$

Тогда $n^3 < n^3+13n-273 < (n+1)^3$, значит, при $n>21$ $n^3+13n-273$ не является кубом натурального числа.

II если $n=21$, то $n^3+13n-273=n^3$, значит, 21 – кубоватое число.

III если $n<21$, то $13n<273$
$$13n-273<0$$
$$n^3+13n-273<n^3$$

$$n^3+13n-273 \vee (n-1)^3$$
$$n^3+13n-273 \vee n^3-3n^2+3n-1$$
$$3n^2+10n-272 \vee 0.$$

1) если $21>n>8$, то $n^2>64$
$$3n^2>192$$
$$10n>80$$
$$3n^2+10n>272$$
$3n^2+10n-272>0$, значит, при $n>8$

$(n-1)^3 < n^3+13n-273 < n^3$, значит, $n^3+13n-273$ не является кубом натурального числа при $21>n>8$

2) если $n=8$, то $n^3+13n-273 = 64\cdot8+80+24-273 = 512+104-$
$-273 = 512-172+3 = 412-72+3 = 400-60+3 = 343 = 7^3$,
значит, 8 – кубоватое число.

3) если $n<8$.
заметим, что при $n\leq5$ $n^3+13n-273<0$.
$$n^3\leq125$$
$$13n\leq65$$
$$n^3+13n-273<0$$

Тогда, осталось проверить, являются ли числа 6 и 7 кубоватыми.

при $n=6$ $n^3+13n-273 = 216+60+18-273 = 216-273+78 = 21$,
но 21 не является кубом натурального числа. ($2^3<21<3^3$

при $n=7$ $n^3+13n-273 = 343+70+21-273 = 70+70+21 = 161$, но
161 не является кубом натурального числа ($5^3<161<6^3$).

Значит, все кубоватые числа – это 8 и 21. их сумма равна 29.

Ответ: 29.

№1.

~~посчитаем количество~~

заметим, что данная фигура – это треугольник, и наложенный на него повернутый такой же треугольник. при повороте сами в себя перейдут только треугольники находящиеся внутри шестиугольника (пересечения этих двух треугольников). Тогда, посчитав количество треугольников в 1 большом треугольнике, умножив на 2 и вычев количество треугольников в шестиугольнике, найдём количество треугольников в данной фигуре.

Количество треугольников в шестиугольнике:

со стороной	1	2	3	4	5	6	7 и более
количество	96	72	50	30	12	1	нет

всего – 261 треугольник.

Количество треугольников в ~~в~~ большом треугольнике:

со стороной	1	2	3	4	5	6	7	8	9 и более
количество	114	86	68	50	32	18	8	2	нет

всего – 376 треугольников.

Всего треугольников в фигуре:

$376 \cdot 2 - 261 = 752 - 261 = 491.$

Ответ: 491 треугольник.