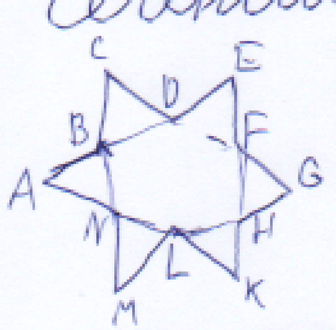
№1

Заметим что все отрезки на рисунке можно разбить на 3 группы: I ~~тип~~ вертикальные прямые, II прямые под углом 60° по часовой стрелке от вертикальных и III прямые под углом 60° против часовой стрелки от вертикальных. Заметим, каждый треугольник содержит ~~по прямой~~ среди ~~его~~ прямых на которых лежат его стороны, по 1 прямой каждого типа. Тогда треугольник однозначно задаётся вертикальной прямой ~~и те~~ на которой лежит его сторона и вершиной не лежащей на этой стороне. Тогда нам нужно посчитать кол-во пар прямая—вершина где прямая — это одна из вертикальных прямых а вершина ~~это~~ одна из вершин ~~не лежащих~~ лежащих на пересечении прямых II и III типа. и не лежащих на прямой с которой она ~~вп~~ в паре. Чтобы посчитать кол во таких ~~прям~~ пар, давайте посчитаем кол-во вершин лежащих на пересечении прямых II и III типа.

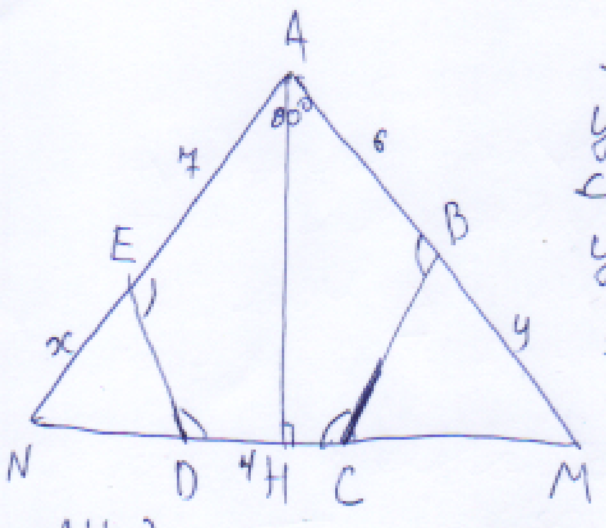


Это все вершины лежащие в ромбе ADGL (включая те что на его сторонах). Их 81 штука. А вертикальных прямых 9. Посчитаем кол-во пар и следовательно и треугольников $2\cdot((81-5)+(81-6)+(81-7)+(81-8))+(81-9)$

$= 2\cdot(81\cdot 4-26)+72 = 2\cdot 298+72 = 370+298 = 668$

Ответ: 668 треугольников.

№2



AH=?

Так как $\angle A = 60^\circ$ и сумма угло пятиугольника 540 и $\angle AED = \angle EDC = \angle DCB = \angle CBA$, $\angle AED$ и углы равные ему будут $\frac{540-60}{4} = 120^\circ$. Продлим AE за E и CD за D до пересечения в N. Продлим AB за B и DC за C до пересечения в M. Заметим $\angle NED = \angle NDE = \angle BCM = \angle CBM = 60^\circ$. Тогда и $\angle END = \angle BMC = 60^\circ$. Тогда треугольники END, BCM и ANM – равносторонние. Пусть BM = y, EN = x. Тогда так как есть 3 равносторонних Δ, верно: $7 + x = x + 4 + y = y + 6$.

$7 + x = y + 6 \Rightarrow x = y - 1$. $7 + x = x + 4 + y$, $x = y - 1 \Rightarrow 7 + y - 1 = 2y + 4 - 1 \Rightarrow$ $6 + y = 2y + 3 \Rightarrow y = 3$. $y = 3$, $x = y - 1 \Rightarrow x = 2$. Тогда стороны треугольника ANM = 9. Нам нужно найти высоту в равностороннем Δ зная сторону. $CH = \frac{\sqrt{3} \cdot 9}{2}$

Ответ: расстояние от A до CD = $\frac{\sqrt{3} \cdot 9}{2}$

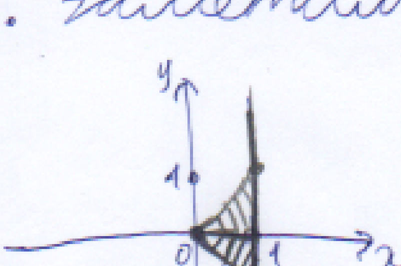
№4

Ответ: при нечетных N.

~~Оценка:~~ Почему нельзя при четных: Заметим максимум ребенок мог подарить N−1 подарок, минимум – 0. Всего N вариантов тогда для любого целого числа от 0 до N ~~что-то подарил~~ ровно 1 человек ~~получил~~ подарил столько подарков. Тогда всего было подарено $\frac{N-1+0}{2} \cdot N$ подарков, тогда каждый получил $\frac{N-1}{2}$ подарков. Но если N-четное то каждый получил нецелое число подарков.

Почему при нечетных N можно:
Предъявим явный алгоритм: ~~Пусть каждый должен бы хотел получить k подарков. Тогда дадим подарки человек с наибольшим кол-вом подарков. потом и по убыванию кол-ва принесенных подарков.~~ Разобьем людей на пары. Человек принесший 0 подарков останется без пары, а человек принесший k подарков (k>0) достанется человек принесший N-k подарков. Так как N – нечетно ни кто не сопоставится сам себе. ~~Тогда каждый~~ Человек дарит один подарок ~~сам~~ второму члену пары, а остальное раздаривает как угодно. А член его пары дарит подарки тем кому не подарил его сопарник. И так сделаем для каждой пары. ~~Тогда после от такой~~ Каждым таким действием мы дарим всем по 1 подарку, в итоге все имеют одинаковое кол-во.

№3. Заметим, из-за корней $0 \le x \le 1$



При $x=1$ нер-во верно для любого y. При $x=0$ лишь для $y=0$ (Если $x=0$ ~~для~~ $y^2 \le 0$ что верно лишь при $y=0$).
При $0<x<1$: $\sqrt{x}$, x^2, $\sqrt{1-x}$ все они >0. Заметим если $y<0$ то $y-x^2<0$, $\sqrt{1-x}>0$ тогда $y+\sqrt{x}>0$ $\Rightarrow$ ~~$y>$~~ Подходят точки $0<x<1$, $-\sqrt{x}<y<0$. Если $y=0$ то $y+\sqrt{x}>0$, $y-x^2<0$, $\sqrt{1-x}>0$. Тогда подходят точки $y=0$, $0<x<1$. При $y>0$: $y+\sqrt{x}>0$, $\sqrt{1-x}>0 \Rightarrow y-x^2<0 \Rightarrow y<x^2$. Тогда ~~при~~ подходят точки: $0<x<1$, $0<y<x^2$

Найдём площадь полученного множества точек. Нам нужно найти сумму площадей I и II зоны. Но площадь II зоны = S III зоны, III а S I зоны + S II зоны = 1.

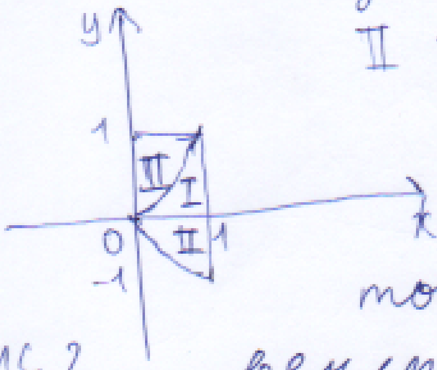


рис 2.

Ответ: Площадь мн-ва точек удовлетворяющих неравенству равна 1.

* на рис2 нарисованы не все точки множества, ~~щие~~ так как все точки прямой $x=1$ удовлетворяют условию. Но площадь не нарисованной части прямой $x=1$ равна 0, следовательно ответ тот же.

№5

~~Докажем, что кубоватое число ровно 1, и это 21. $21^3+13\cdot21-273=21^3$, оно и вправду подходит. Пусть есть ещё какое-то~~

№5

Ответ: ~~...~~ 21

Докажем, что кубоватое число ровно 1 и это 21. очевидно 21 подходит $21^3+13\cdot21-273=21^3$. Докажем, что других кубоватых чисел нет: