

№1.

Назовём треугольник "третьим", если его сторона состоит из трех маленьких Δ (); "вторым", если его сторона состоит из двух маленьких Δ (); и т.д.

Начнём считать с самых больших Δ - "двенадцатых".
Очевидно, что их - два. Далее рассмотрим "одиннадцатых" треугольников.
Их $(1+2) \cdot 2 = 6$ () "девяток" треугольников - $(1+2+3) \cdot 2 = 12$. Заметим,

что каждый раз кол-во треугольников задается формулой $(1+2+\dots+(n-1)) \cdot 2$.
Т.к. когда мы уменьшаем длину стороны Δ на один, то на рисунке появляется ещё один ряд, в котором можно найти $n-1$ треугольников больше, чем в предыдущем ряду.

Это работает для всех Δ , сторона которых > 3 , т.к. если сторона ≤ 3 , то мы не можем поставить там "девяток" в самый верхний ряд.
Большого треугольника, получится только так:  Заметим, что большой Δ можно

разделить на один "девятый" треугольник, который в свою очередь разбивается на "третьи" треугольники по вышеописанной стратегии.



Также нельзя забывать о краях, на которых находится ещё $3 \cdot 3 \cdot 2 = 18$ "третьих" треугольников

$\Rightarrow$ "третьих" треугольников по краям: $28 \cdot 2 = 56$

и всего "третьих" Δ : $56 + 18 = 104$;

Теперь найдём кол-во "вторых" треугольников.

По той же стратегии их $(1+2+3) \cdot 2 = 12$.

"Первых" треугольников - 120 $\Rightarrow$ всего треугольников - 668.

Ответ: 668.

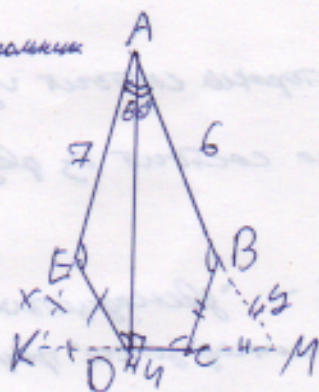
$$\angle A = 60^\circ \Rightarrow \text{остальные углы равны } (360 - 60) : 4 = 120^\circ$$

~2.

Дано:
ABCDE - пятиугольник
AE = 7
AB = 6
CD = 4
 $\angle A = 60^\circ$
 $\angle B = \angle C = \angle D = \angle E$

Найти:

$$AH = ?$$



Продлим AB до пересечения с CD,
и AE до пересечения с CD. Получим равностор.

$\triangle AMK$, т.к. $\angle AEP = 120^\circ \Rightarrow \angle KEP = 180 - 120 = 60^\circ$.

$$\angle EDC = 120^\circ \Rightarrow \angle EDK = 60^\circ \Rightarrow \angle EKP = 60^\circ \text{ и } KE = ED = KD = x$$

$$\angle ABC = 120^\circ = \angle CBM = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$$

$$\angle DCB = 120^\circ \Rightarrow \angle BCM = 60^\circ \Rightarrow \angle BMC = 60^\circ \text{ и } BM = MC = BC = y$$

Т.к. $\triangle AMK$ - равностор (все углы по 60°), то $AM = AK = KM \Rightarrow$

$$\begin{cases} 6 + y = x + 4 + y \\ 7 + x = x + 4 + y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 3 \\ x = 2 \end{cases}$$

Т.к. в равностор. $\triangle$ высота является медианой и биссектрисой,
то $KH = HM \Rightarrow \frac{x + y + 4}{2} = \frac{5 + 4}{2} = 4,5$

По т. Пифагора $AH^2 = AK^2 - KH^2$

$$AH^2 = 9^2 - 4,5^2 = (9 - 4,5)(9 + 4,5) = 4,5 \cdot 13,5 = 60,75$$

$$AH = \sqrt{60,75}$$

$$AH = \sqrt{5^2 \cdot 0,1^2 \cdot 3^2}$$

$$AH = 4,5\sqrt{3}$$

Ответ: $4,5\sqrt{3}$

~3.

$$(y + \sqrt{x})(y - x^2)\sqrt{1-x} \leq 0$$

Решо $(y + \sqrt{x})(y - x^2)\sqrt{1-x} = 0$, тогда:

$$\begin{matrix} y + \sqrt{x} = 0 & y - x^2 = 0 & \sqrt{1-x} = 0 \\ y = -\sqrt{x} & y = x^2 & \end{matrix}$$

x не может быть < 0 , т.к. $\sqrt{x} \geq 0$

x должен быть ≤ 1 , т.к. $\sqrt{1-x} \geq 0$

Т.к. $\sqrt{1-x}$ всегда ≥ 0 , то $(y + \sqrt{x})(y - x^2) \leq 0$

Т.к. эти два графика пересекаются

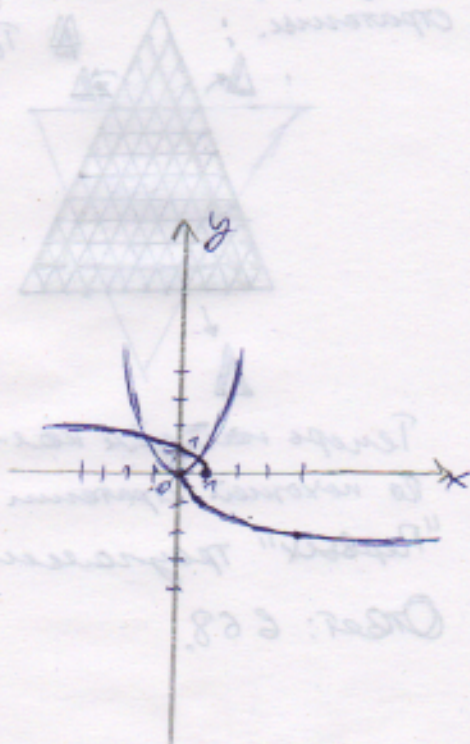
в одной точке, то $y = 0$

$$\begin{cases} x \in [0; 1] \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

Площадь этого множества

Ответ: 1.

$$1 \cdot 1 = 1$$



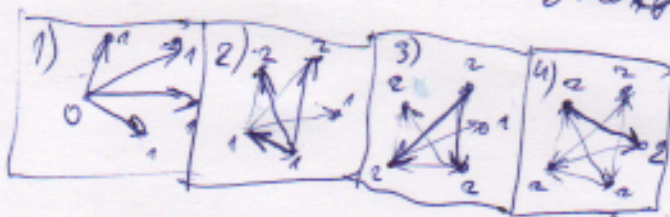
~ 4.

Ответ: при всех чётных n

Чётное n не подходит, потому что если каждый ребёнок дарит разное число подарков, то всего было подарено $\frac{(n-1) \cdot n}{2}$ подарков $\Rightarrow$ эта сумма либо будет нечётной, и тогда не будет делиться на n , либо это будет произведение чисел $(n-1)$ и $\frac{n}{2}$, но т.к. $n-1$ - нечётное, а $\frac{n}{2} \nmid n$, то $\frac{(n-1)n}{2} \nmid n$.

При нечётных же n $(n-1)$ - чётное $\Rightarrow$ оно $: 2$, и произведение чисел $\frac{n-1}{2}$ и $n : n \Rightarrow$ у всех детей могло оказаться одинаковое кол-во подарков в конце

Пример: $n=5$; $\frac{(n-1)n}{2} = \frac{4 \cdot 5}{2} = 10 \Rightarrow$ у каждого ребёнка будет 2 подарка



~ 5.

Заметим, что $(n^3 + 13n + 273) : n^3 : n$
 $13n : 13; n$
 $273 : 13; 7; 3 \Rightarrow$ этот трехзначный точно является кубом числа n .

$$n^3 + 13n + 273 = n^3$$

$$13n + 273 = 0$$

$$n = -21$$

Во всех остальных случаях $13n + 273$ не могут сократиться, и т.к. кубы чисел расположены друг от друга с увеличением разности, чем $13n + 273$, то при $n > 21$ $13 \cdot (221 - 21) < (221)^3$ противоречие
 при $n < 6$ $n^3 + 13n + 273 < 273$
 при $6 \leq n \leq 20$ число $13 \cdot (n - 21)$ отрицательное и точно $< n^2$ противоречие
 значение данного выражения $< 0 \Rightarrow$ куб неот. числа < 0 противоречие

* $n^3 = n^3$
 $(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$
 $(n+1)^3 - n^3 = 3n^2 + 3n + 1$

подходит только $n=21$

Ответ: 21.