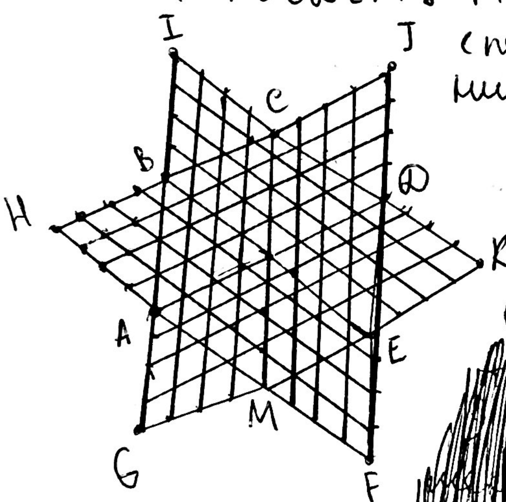
Задача 1: К302-24

1) Рассмотрим вершины треугольников. Возможно заметить, что 2 из 3х вершин каждого треугольника обязательно лежат на одной прямой — вертикали, а третья (назовём её противоположной) не обязательно лежит на вертикали.

2) Первый случай: противоположная вершина располагается внутри или на границах большого 6-ти угольника ABCDEM. Посчитаем сколько будет узелков (пересечений прямых) внутри + границе ABCDEM:



$18+6+12+6+18+1=61$

61 — кол-во возможных расположений противоположной вершины.

А кол-во расположений оставшихся 2х вершин — 8! Их будет 8, а не 9, т.к. одну вертикаль уже занимает противоположная вершина.

Значит Δ-ков будет: $61 \cdot 8 = 488$

3) Второй случай: противоположная вершина лежит в зубчиках фигуры (т.е. Δ-ках HBA, BIC, CJD, DKE, EFM, MGA)

Но! Невозможно, чтобы противоположная вершина лежала сверху или снизу ABCDEM (т.е. в Δ-ках BIC, CJD, EFM и MGA), т.к. иначе это превращается в случай 1, т.к. все узелки в этих треугольниках содержат в себе вертикали и наша противоположная вершина уже будет лежать внутри ABCDEM.

Задача 1 Продолжение:

Следовательно противоположной остаётся только лежать в HBA и DKE (слева и справа)

Всего возможных положений для противоположной вершины 20 (в одном Δ-ке 10 и в другом столько же)

А положений для 2х оставшихся − 9, т.к. на этот раз противоположная не лежит на узелке с вертикально.

Следовательно: $20 \cdot 9 = 180$

А всего Δ-ков в данной фигуре:

$488 + 180 = 668$

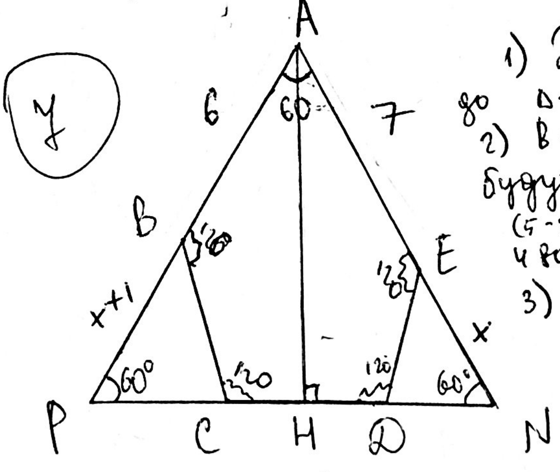
Ответ: 668 (7)

Задача 2:

Дано:
ABCDE − выпуклый 5-тиугольник
$\angle A = 60°$
остальные = м/д собой
$AB = 6$
$CD = 4$
$EA = 7$

Рас-ние от т. A до CD = ?

Решение:



1) Достроим 5-тиугольник до Δ-ка APN.

2) Все остальные углы ABCDE будут = 120 (т.к. $\Sigma\angle$ 5-гольника $= (5-2)\cdot 180 = 540$; $540 - 60 = 480$; $480 : 4 = 120$)

3) Δ APN − равносторонний (т.к. Σ смежных = 180 ⇒ ⇒ $\angle CBP = \angle BCP = \angle EDN = \angle DEN = 180° - 120° = 60°$, а $\Sigma\angle\Delta = 180° \Rightarrow \angle BPC = \angle END = 180° - 60° - 60° = 60°$)

4) т.к. APN равносторон., то $AP = AN$

5) Обозначим $EN = x \Rightarrow BP = x + 1$ (т.к. пункт 4)

6) Δ BPC и Δ END равност. ⇒ $PB = PC$ и $EN = DN \Rightarrow PC = x+1$, а $DN = x$. 7) т.к. APN равносторонний, то $AP = PN = AN \Rightarrow$ $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ $\sqrt{\frac{243}{4}}$

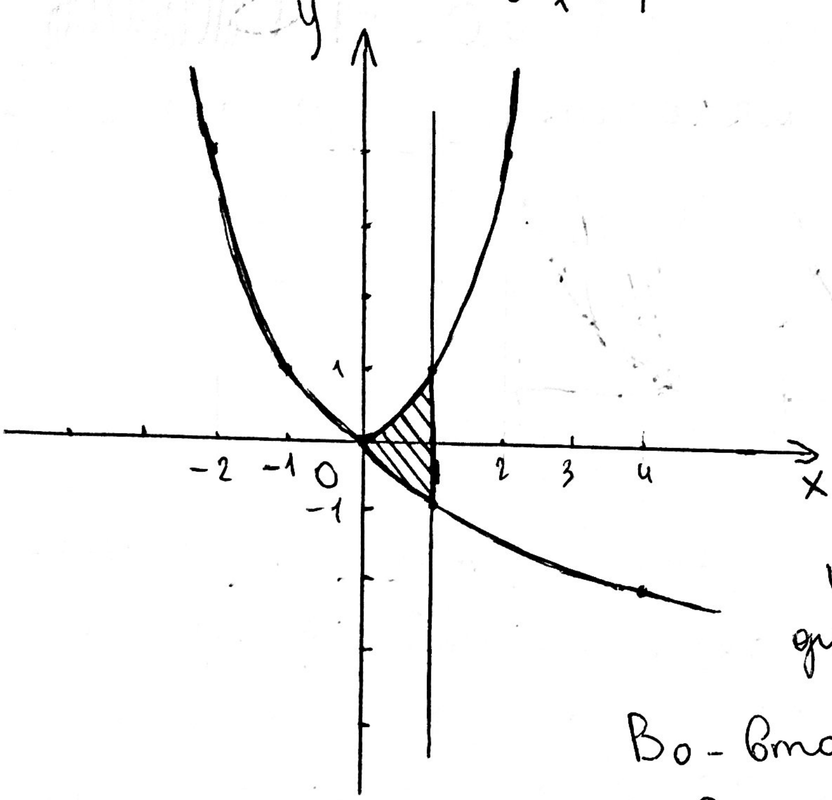
$6 + x + 1 = x + 1 + 4 + x \Rightarrow x + 7 = 2x + 5 \Rightarrow x = 2$

8) Проведём высоту AH к CD. Δ ANH прямоуг. и $\angle HAN = 180° - 90° - 60° = 30°$ ⇒ в прямоуг. Δ-ке напротив $\angle 30°$ лежит сторона $= \frac{1}{2}$ гипотенузы. ⇒ $HN = \frac{7+2}{2} = 4{,}5$ 9) По Th Пифагора найдём AH: $AH^2 + 4{,}5^2 = 9^2 \Rightarrow AH = \sqrt{60{,}75} = 5\sqrt{2{,}43}$ Ответ: $AH = \sqrt{60{,}75}$

Задано 3:

$(y+\sqrt{x})(y-x^2)\sqrt{1-x} \le 0$

Очевидно, что на графике мы будем использовать функции:
- $y=-\sqrt{x}$
- $y=x^2$
- $x=1$



ОДЗ: $x \in [0;1]$

(т.к. $\sqrt{x} \Rightarrow x \ge 0$

и $\sqrt{1-x} \Rightarrow x \le 1$)

Во-первых так как неравенство не строгое, то сами границы функций будут входить.

Во-вторых рассмотрим знаки скобочек.

- $\sqrt{1-x}$ — всегда неотрицателен
- если $(y-x^2)$ — положительна, то $(y+\sqrt{x}$ тоже становится >0. $\Rightarrow$ положит. * положит. * неотриц. всегда ≥ 0 (давайте теперь рассматривать только отрицательность и положительность, т.к. 0 (т.е. границы) всегда подходит)

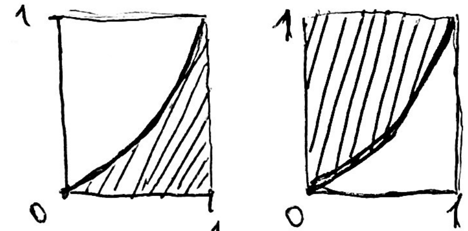
Следовательно $(y-x^2)$ — отрицательна. Если $(y+\sqrt{x})$ будет тоже отрицательна, то получится опять отриц.* отриц. = положит., а положит * положит $>0 \Rightarrow$ не подходит. Из этого делаем вывод, что $(y+\sqrt{x})$ — положит., $(y-x^2)$ — отрицат. $\Rightarrow$ нам подойдёт заштрихованная на рисунке область

Задача 3 продолжение: М3О2-24

Найдём площадь получившейся фигуры:

$y = x^2$ и $y = -x^{\frac{1}{2}}$

Т.е. по факту если взять $y = x^{\frac{1}{2}}$ — это ветвь параболы x^2, которая ≥ 0. Т.е. их можно наложить друг на друга. Т.е:

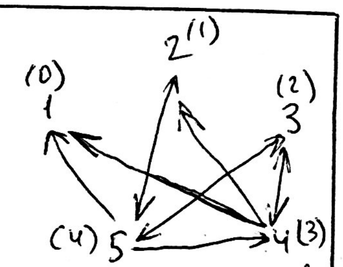


$y = x^2$ $y = -x^{\frac{1}{2}}$

При наложении этих двух фрагментов функции совпадут, а кусочки нашей заштрихованной фигуры сложатся в квадрат со стороной 1. Это значит, что S этой фигуры $= 1 \cdot 1 = 1$! Ответ: площадь фигуры = 1. 7

Задача 4: 7

Все получили поровну подарков. Т.е. среднее арифметическое, т.е.: $\frac{n-1}{2}$ подарков каждый.



(в скобках кол-во подарков который он дарит)
Рисунок 1

В таком случае n — обязательно нечётное, т.к. при чётных n — кол-во подарков — не целое число.
Распределим всех детей по парам, кроме того, кто дарит 0 подарков. Первый человек в паре дарит k подарков, и дарит он тем, кому не подарил его напарник n-k и самому напарнику. Тем самым каждый ребёнок получает по одному подарку от каждой пары. Т.е.: $\frac{n-1}{2}$ подарков (т.е. n-1 — т.к. не дарит подарков 1 человек и делим на 2 т.к. распределили по парам) | Ответ: при нечётных N.

Задача 5: 2 11302-24

Во-первых нужно заметить, что $N > 6$, т.к. при $N < 6$ $n^3+13n-273$ — будет ≤ 0, при этом не существует такого НАТУРАЛЬНОГО числа, куб которого < 0. Само число 6 тоже не подходит.

Подходит число $n=8$: $512+104-273 = 343$

А 343 — это куб 7.

Рассмотрим чётность:

Допустим n — нечётно: нч + нч − нч = нч

Допустим n — чётное: ч + ч − нч = нч

Т.е. без разницы будь n чётным/нечётным $n^3+13n-273$ — всегда нечётно. Это значит, что $n^3+13n-273$ — является кубом нечётного числа

Теперь:

$$n^3+13n-273 = x^3$$ (x — наше число нечётное)

$$(n-x)(n^2+nx+x^2)+13(n-21)=0$$

• если $x = 21$, то равенство выполняется

Но если $x=21$, то n тоже $=21$

Ответ: 29