Задача 5

Ответ: 29

Решение: Пусть $f(n) = n^3 + 13n - 273$

Для начала докажем, что $f(n) < (n+1)^3$

$n^3 - 13n - 273 < n^3 + 3n^2 + 3n + 1$

$3n^2 - 10n + 274 > 0$

Заметим, что $D_1 = 25 - 274 \cdot 3 < 0$, а также коэф. при $n^2 > 0$, значит, ветви параболы направлены вверх и все ее значения положительны. (ч.т.д.) $f(x) < (n+1)^3$

Теперь рассмотрим случай $f(x) = n^3$

$n^3 + 13n - 273 = n^3$

$13n - 273 = 0$

$13(n - 21) = 0$

$n = 21$

Таким образом, одно кубоватое число мы нашли.

Теперь давайте рассмотрим случай $f(n) = (n-1)^3$

1

$n^3+13n-273=n^3-3n^2+3n-1$

$3n^2+10n-272=0$

$D_1=25+272\cdot 3=25+816=841$

$$\left[\begin{array}{l} n=\frac{-5+\sqrt{841}}{3} \\ n=\frac{-5-\sqrt{841}}{3} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} n=\frac{-5+29}{3} \\ n=\frac{-5-29}{3} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} n=8 \\ n=-\frac{34}{3} \text{ - не удовл. усл} \end{array}\right.$$

Значит, $n=8$ подходит:

$512+13\cdot 8-273=512+104-273=343=7^3$

Значит, мы нашли еще одно кубоватое число

Теперь рассмотрим график $y=3n^2+10n-272$.

Ветви параболы направлены вверх и функция принимает неотрицательные ~~знач~~ значения на промежутках

$\left(-\infty; -\frac{34}{3}\right] \cup [8; +\infty)$.

Значит, при $n>8$ $f(n)>(n-1)^3$, а следовательно и больше $(n-x)^3$ при всех натур. x

2

Отдельно рассмотрим случаи при $n=6$ и $n=7$

1) $n=6$

$216+78-273=21$

$21 \neq a^3$

6 не кубоватое число

2) $n=7$

$343+91-273=161$

$161 \neq a^3$

7 не кубоватое число

А теперь заметим, что при $n \leq 5$

$f(n)<0$

$125+65-273<0$

$64+52-273<0$

$27+39-273<0$

$8+26-273<0$

$1+13-273<0$

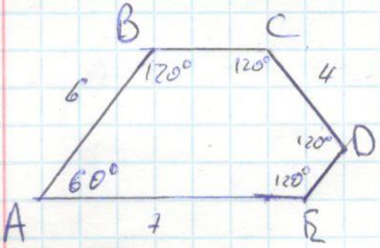
Значит, кубами натур. чисел $f(n)$ при $n \leq 5$ не может быть.

Значит, подходят только $n=21$ и $n=8$

$8+21=29$.

Задача 2

Дано:
$\angle A = 60^\circ$
$\angle B = \angle C = \angle D = \angle E$
$AB = 6$ $CD = 4$ $EA = 7$



Найти: расстояние от A до прямой CD

Решение

Сумма углов пятиугольника равна 540°. Если один равен 60°, а все остальные равны между собой, найдем все остальные

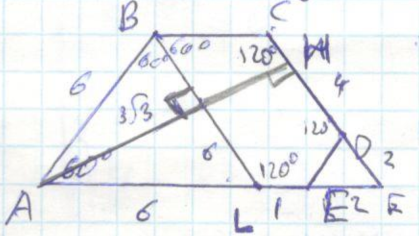
$$\frac{540-60}{4} = \frac{480}{4} = 120^\circ.$$

Теперь проведем бис-су из угла B. Она пересечет AE и разобьет AE на отрезки длиной 6 и 1. Точку пересечения обозначим через L $\angle ABL = \angle LBC = \frac{120^\circ}{2} = 60^\circ$

Тр-ник ABL равносторонний, т. к. у него 2 угла равны 60°. Значит, третий равен 60°

Длина стороны у этого тр-ка будет 6

Проведем высоту из A на BL. Т.к. это высота в равностороннем тр-ке, то ее длина равна $3\sqrt{3}$



$\angle LBC + \angle BCD = 180° \Rightarrow$

$\Rightarrow BL \parallel CD$, т.к. у них односторонние углы в сумме дают $180°$.

Аналогично, $BC \parallel LE$ т.к. $\angle LBC + \angle BLF = 180°$

Проведем CD и LE до точки пересечения. Пусть это будет F.

Тогда BCFL — пар-м т.к. у него стороны параллельны. $BL = CF \Rightarrow DF = 6 - 4 = 2$.

$\angle EDF = 180° - 120° = 60°$ $\angle DEF = 180° - 120° = 60°$ как смежные с углами в $120°$.

В тр-ке DEF два угла равны $60°$. Значит, он равносторонний с длиной стороны 2

$EF = 2 \Rightarrow AF = 6 + 1 + 2 = 9$.

Т.к. $BL \parallel CF$, то если мы продлим высоту из A на BL то она будет $\perp$ CF.

Пусть пересечет в точке H

$\angle AFD = 60° \Rightarrow AH = 9 \cdot \sin 60° = \frac{9}{2}\sqrt{3}$

5

Ответ: $\frac{9\sqrt{3}}{2}$

Задача 3

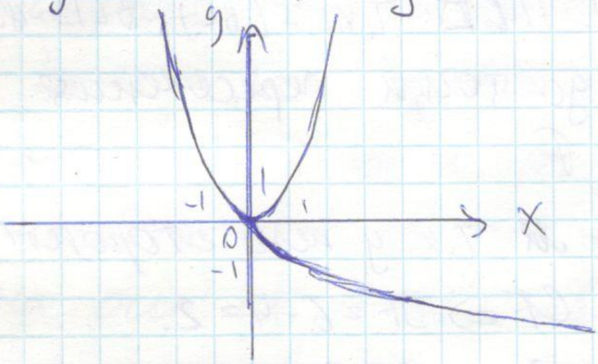
Ответ: 1

~~начертим графики~~

$(y+\sqrt{x})(y-x^2)\sqrt{1-x} \leq 0$

начертим графики функций

$y=-\sqrt{x}$ и $y=x^2$



$D(y)$: $\begin{cases} 1-x \geq 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x \leq 1 \\ x \geq 0 \end{cases}$ Значит: $0 \leq x \leq 1$

$\sqrt{1-x}$ всегда положительное, поэтому на знак никак не влияет. Мы используем его для нахождения области определения

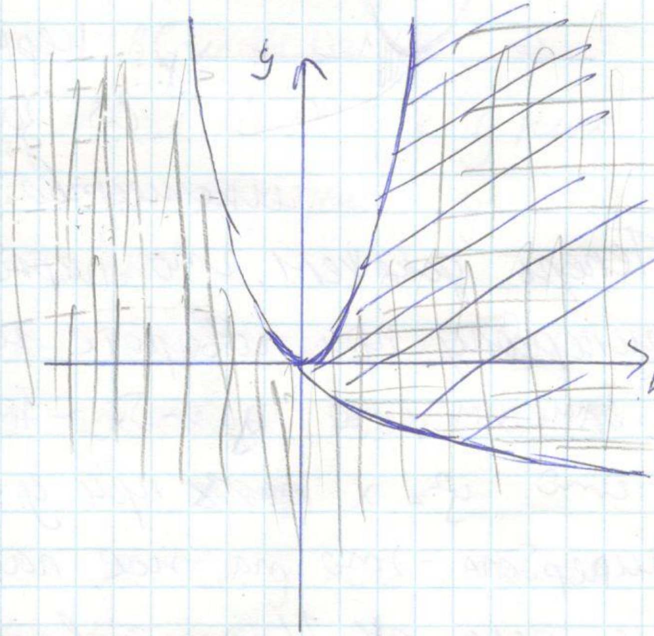
6

Тогда давайте видоизменим наше неравенство

$(y+\sqrt{x})(y-x^2) \leq 0$ при $0 \leq x \leq 1$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} y+\sqrt{x} \geq 0 \\ y-x^2 \leq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} y+\sqrt{x} \leq 0 \\ y-x^2 \geq 0 \end{cases}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} y \geq -\sqrt{x} \\ y \leq x^2 \end{cases} \\ \begin{cases} y \leq -\sqrt{x} \\ y \geq x^2 \end{cases}\end{array}\right.$$

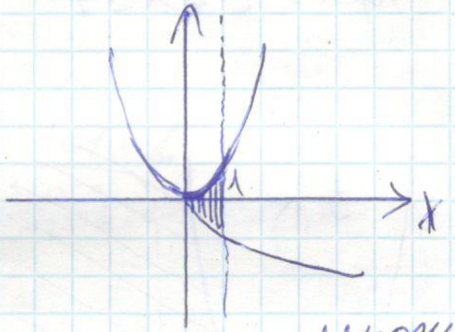


Теперь изобразим эти неравенства графически. Также заметим, что вторая система решений не имеет, т.к. y не может быть меньше отрицательного числа и больше положительного одновременно. Решение второй я выделил диагональными линиями.

Но вспомним теперь про область определения: $0 \leq x \leq 1$. Тогда решение уравнение

7

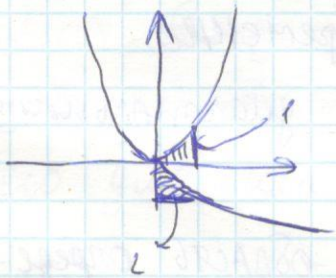
графическое меняется



Теперь множеством решения ~~уравнен~~ неравенства является заштрихованное множество точек.

Теперь докажем, что парабола перейдет в гиперболу при повороте на 90°.

Заметим, что $y = -\sqrt{x}$ – это тоже самое, что $y^2 = x$ ~~xxxx~~ при $y \leq 0$. Значит, ~~пара~~ гипербола – это та же парабола, построенная на оси Ox. И при повороте параболы на 90°, она совпадет с гиперболой. Значит, заштрихованная часть (1) совпадет с заштрихованной частью (2)



Тогда площадь множества точек, удов. нер-ву равна площади одной клетки.

Пусть сторона клетки равна 1

Тогда ее площадь 1. Тогда Ответ 1.

8

Задача 4

Ответ: N - нечетное большее 2 (любое)

Заметим, что нет ребенка, подарившего N подарков, т.к. каждый дарит каждому не более одного подарка, и один ребенок может подарить максимум $N-1$ ребенку.

Получается, что есть N детей, каждый дарит не более $N-1$ подарка, а также все дарят разное кол-во подарков. То каждое кол-во подарков от 0 до $N-1$ было подарено, т.к. на натуральном отрезке $[0; N-1]$ ровно N способов выбрать, сколько подарить подарков. А если какое-то кол-во подарков было не подарено, то детей меньше, чем N.

Т.к. подарено подарков $0, 1, 2, 3 \ldots N-1$, то посчитаем, сколько всего подарено:

всего подарено: $0+1+2+\ldots+N-1=\frac{(N-1)N}{2}$

Пусть каждый ребенок получил a подарков. Тогда общее кол-во подарков также равно aN

$aN = \frac{(N-1)N}{2}$

$a = \frac{N-1}{2}$ т.к. каждый получил целое кол-во подарков, то $\frac{N-1}{2}$ – целое, значит, $N-1 \vdots 2$ значит, N – нечетное

Пример для нечетных N.

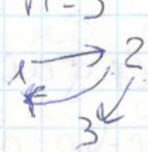
Пронумеруем детей от 1 до $2k+1$

Пусть $N = 2k+1$. $2k+1$ ребенок дарит 0 подарков. Остальные дарят столько, какой у них номер. Теперь давайте расставим детей по кругу.

Каждый ребенок дарит ~~людям~~ детям, стоящим после него по часовой стрелке. Таким образом каждый получить должен k подарков.

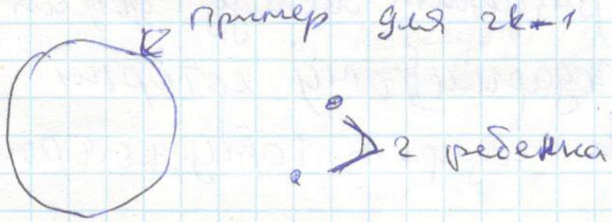
Докажем пример по индукции

База: $n=3$



каждый получил по 1

Переход: Пусть для $2k-1$ мы можем построить пример, докажем, что для $2k+1$ тоже можем



В прошлом примере (для $2k-1$) у каждого ребенка было от 0 до $2k-2$ подарков (у всех разное). Давайте к каждому кол-ву подарков ребенка прибавим по 1 подарку. Теперь у детей будут кол-ва от 1 до $2k-1$ А добавим мы детей с количествами 0 и $2k$.

До этого у детей было по $k-1$ подарку Сейчас должно быть по k. Пусть ребенок с $2k$ подарками подарит их всем остальным.

Теперь у $2k-1$ детей по k подарков, полученных от других. У ребенка, который дарит 0, 1 подарок, А тот, который

подарил 2k вообще без подарков.
Но у нас осталось 2k-1 подарков, которые мы прибавили к начальным детям.
Давайте их разделим между двумя ковыми. k-1 подарим тому, который дарит 0, а k подарков тому, который подарил 2k.

Переход доказан!

Значит, и пример тоже

Задача 1

Ответ: 662

тр-ков со стороной 1: 120
Тр-ков со стороной 2: 108
Тр-ков со стороной 3: 104
Тр-ков со стороной 4: 90
Тр-ков со стороной 5: 72
Тр-ков со стороной 6: 56
тр-ков со стороной 7: 42
тр-ков со стороной 8: 30
тр-ков со стороной 9: 20
со стороной 10: 12
со стороной 11: 6
со стороной 12: 2