N1

$$\underset{1}{(1\cdot 2)}+\underset{2}{(8\cdot 6)}+\underset{3}{2(8+3)(8-2)}+\underset{4}{(9\cdot 2+8\cdot 3+7\cdot 4+6\cdot 5+5\cdot 6+4\cdot 7+3\cdot 8+2\cdot 7+1\cdot 6)}=3980$$

1) Вся эта картина состоит из 2-х треугольников. Их посчитаем первыми.

$1\cdot 2=2$

2) Рассмотрим 1 угол шестиугольника и посчитаем все треугольники, кроме большого, с этим углом. Их 8. Но углов 6:

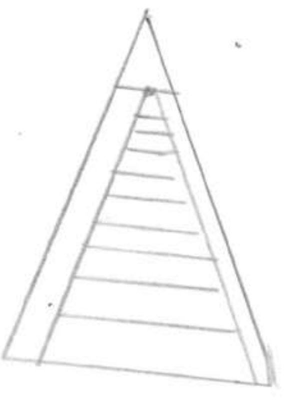
$6\cdot 8=48$

3) Рассмотрим большой треугольник. Посчитаем все треугольники, вершина которых лежит на стороне большого треугольника, кроме ранее подсчитанных. На каждой „линии" 2 такие вершины. ~~(Свои)~~ И всего 2 больших треуг. Они заканчиваются на 4 линии, но последний треуг. не счит.

$2\cdot 2(8+7+6+5+4\overset{+3}{)}=4\cdot\frac{(8+2)(8+3)}{2}=2(8+3)(8-2)=132$

4) Остались треугольники, которые находятся между предыдущими видом треуг. В отличие от них ~~они~~ их кол-во меняется на каждой линии и последний треуг. мы будем считать:

$2(9\cdot 2+8\cdot 3+7\cdot 4+6\cdot 5+5\cdot 6+4\cdot 7+3\cdot 8+2\cdot 7+1\cdot 6)=398.$

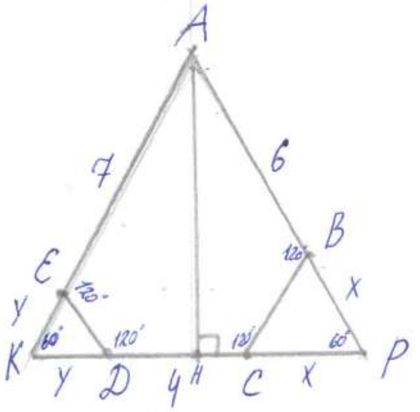


$2+48+132+398=50+530=580.$

N2

Дано:
ABCDE-пятиугольник
$\angle A=60^\circ$
$\angle B=\angle C=\angle D=\angle E$
$AB=6$
$AE=7$
$DC=4$
$AH\perp DC$.

$AH-?$



Продолжим стороны AB и DC до их пересечения P;
и стороны AE и CD до их пересечения K.

1) $\angle A+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E=540^\circ$ (т.к. ABCDE – пятиугольник)
$60^\circ+\angle B+\angle C+\angle D+\angle E=540^\circ$ (т.к. $\angle A=60^\circ$)
$4\cdot\angle B=480^\circ$ (т.к. $\angle B=\angle C=\angle D=\angle E$)
$\angle B=120^\circ$

2) $$\left.\begin{aligned}&\angle CBP=180^\circ-\angle CBA=180^\circ-120^\circ=60^\circ\\&\angle BCP=180^\circ-\angle BCK=180^\circ-120^\circ=60^\circ\\&\angle P=180^\circ-\angle CBP-\angle BCP=180^\circ-60^\circ-60^\circ=60^\circ\end{aligned}\right\}\Rightarrow \triangle BCP\text{ – равностор.}\Rightarrow BP=CP=X$$

$$\left.\begin{aligned}&\angle KED=180^\circ-\angle AED=180^\circ-120^\circ=60^\circ\\&\angle EDK=180^\circ-\angle EDP=180^\circ-120^\circ=60^\circ\\&\angle K=180^\circ-(\angle KED+\angle EDK)=180^\circ-120^\circ=60^\circ\end{aligned}\right\}\Rightarrow \triangle KED\text{ – равностор.}\Rightarrow KE=KD=Y$$

3) $$\left.\begin{aligned}&\angle K=\angle P=\angle A=60^\circ\Rightarrow\triangle AKP\text{ – равностор.}\Rightarrow AK=KP=AP\\&AB=6;\ AE=7;\ DC=4;\ EK=KD=Y;\ BP=CP=X\end{aligned}\right\}\Rightarrow$$

$\Rightarrow 7+Y=6+X=4+X+Y$

а) $7+Y=4+X+Y$; б) $6+X=4+X+Y$
$7=4+X$; $6=4+Y$
$3=X$; $Y=2$
$X=3$;

4) $\angle HAP=180-60^\circ-90^\circ=30^\circ$ (т.к. $AH\perp DC$)
$HP=KP/2$ (т.к. $\triangle AKP$ – равностор.)
$HP=4{,}5$
$AH=\cos30^\circ\cdot 9=\frac{\sqrt3}{2}\cdot 9=4{,}5\sqrt3$

Ответ: $4{,}5\sqrt3$

N3

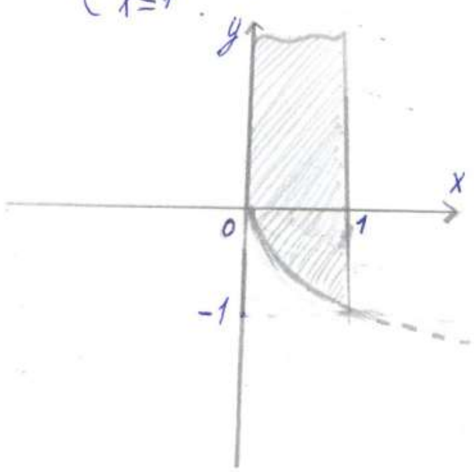
$$(y+\sqrt{x})(y-x^2)\sqrt{1-x} \le 0$$

$$\Updownarrow$$

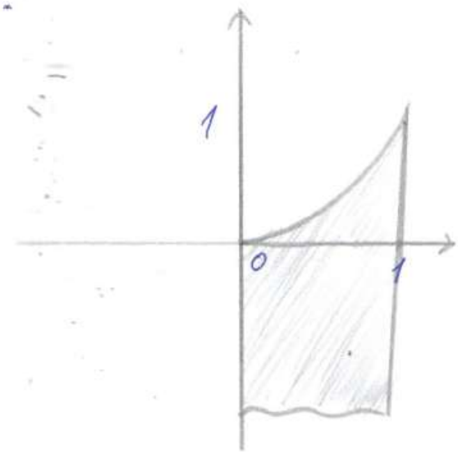
$$\begin{cases} (y+\sqrt{x})(y-x^2) \le 0 \quad (1) \\ x \le 1 \end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y+\sqrt{x} \le 0 \\ y-x^2 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \\ \begin{cases} y+\sqrt{x} \ge 0 \\ y-x^2 \le 0 \end{cases} \Rightarrow \end{array} \right. \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y \le -\sqrt{x} \le 0 \\ y \ge x^2 \ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} y \ge -\sqrt{x} \\ y \le x^2 \end{cases} \end{array} \right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y \le 0 \\ y \ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} y \ge -\sqrt{x} \\ y \le x^2 \end{cases} \end{array} \right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} y \ge -\sqrt{x} \\ y \le x^2 \end{cases} \end{array} \right. \Rightarrow \begin{cases} y \ge -\sqrt{x} \\ y \le x^2 \end{cases}$$

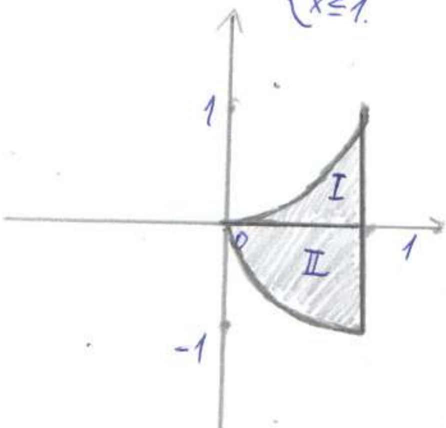
$$\begin{cases} y \ge -\sqrt{x}; \\ x \le 1. \end{cases}$$



$$\begin{cases} y \le x^2; \ (x \ge 0 \text{ т.к. } \exists\sqrt{x}) \\ 0 \le x \le 1. \end{cases}$$

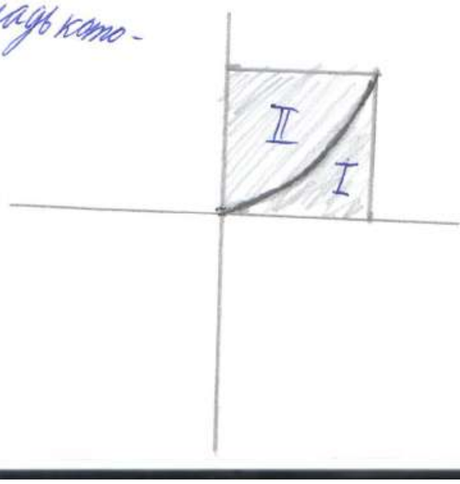


$$\begin{cases} y \ge -\sqrt{x} \\ y \le x^2 \\ x \le 1. \end{cases}$$



Перенесём фигуру II на 90° против часовой стрелки. Получим квадрат со стороной 1, площадь которого равна единице.

Ответ: 1.



N4

Один ребенок не мог подарить другому боле одного подарка $\Rightarrow$ каждый дарил не боле $N-1$ подарок. Но каждый подарил разное кол-во подарков. $\Rightarrow a_n = \{0; 1; \ldots; N-1\}$, где a_i – i-тый ребёнок, кот. подарил $i-1$ подарок.

$$\sum_{i=1}^{N} a_i = \frac{N\cdot(N-1)}{2}.$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{N\cdot(N-1)}{2} \vdots N \text{ (т.к. все получили одинаковые кол-во подарков).} \\ (N; N-1) = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow N \not\vdots 2$$

$N = 2n+1$. :

Рассмотрим ~~к-ого~~ ребёнка, который подарил K подарков. И ребёнка, который подарил $2n-K$ подарков. Каждая такая пара детей должны подарить всем $2n$ детям по одному подарку, кроме „изолированного" ребёна т.к. у него нет пары, но это не проблема: он никому ничего не подарит.

N5

$n^3+13n-273=(n-a)^3 \mid n\in N;\ a\in Z$

$n^3+13n-273=n^3-3n^2a+3a^2n-a^3 \mid -(n^3-3n^2a+3a^2n-a^3)$

$13n-273+3n^2a-3a^2n+a^3=0$

$(3a)n^2+(-3a^2+13)n+(a^3-273)=0$

$D=(13-3a^2)^2-12a(a^3-273)=169-78a^2+9a^4-12a^4+\cancel{3}2730a+546a=-3a^4-78a^2+$
$+3276a+169=(3276a-3a^4)+(169-78a^2)=a(3276\cancel{a}-3a^3)+(169-78a^2)$
$\Downarrow a\geq 0$

Хотя бы одно из этих слагаемых ≥ 0. В противном случае $D<0$.

$\left[\begin{array}{l}3276-3a^3\geq 0\\ 169-78a^2\geq 0\end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l}3276\geq 3a^3\\ 169\geq 78a^2\end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l}1092\geq a^3\\ 13\geq 6a^2\ (1)\end{array}\right.$ $\qquad (1)\Rightarrow \frac{13}{6}\geq a^2 \Rightarrow 2\frac{1}{6}\geq a^2 \Rightarrow 3\geq a^2$

$\left[\begin{array}{l}1092\geq a^3\\ 3\geq a^2\end{array}\right.$

$10\geq a$

Осталось перебрать „a" от 0 до 10 и найти такое D, что D яв-ся квадратом целого числа. В ходе перебора выясняется, что подходят только $a=0$ и $a=1$. При $a=1$, $n=8$. При $a=0$, $n=21$.

Ответ: $21+8=29$.