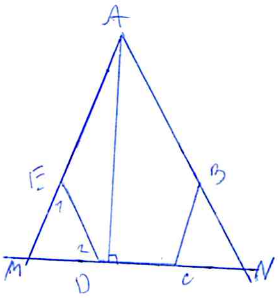
①

Треугольников из 1 маленького – 120
Треугольников из 4 маленьких – 114
Треугольников из 9 маленьких – 104
Треугольников из 16 маленьких – 90
из 25 маленьких – 72
из 36 маленьких – 56
из 49 маленьких – 42
из 64 маленьких – 30
из 81 маленького – 20
из 100 маленьких – 12
из 121 маленького – 6
из 144 маленьких – 2.
Всего: 668.

Ответ: 668 треугольников.

②



Дано:
$\angle A = 60°$, а $\angle B = \angle C = \angle D = \angle E$.
$AB = 6$ $CD = 4$ $EA = 7$
Найти:
Расстояние от A до CD

Решение:

Искомое расстояние – это $\perp$ из A на CD.
$\angle A = 60° \Rightarrow \angle B + \angle C + \angle D + \angle E = 540° - 60° = 480° \Rightarrow \angle B = \angle C = \angle D = \angle E = 120°$.
Продлим AE, CD, AB до пересечения. Получим $\triangle AMN$.
$\angle M = 60°$, т.к. $\angle 1 = \angle 2 = 60°$, т.к. $\angle E = \angle D = 120°$. Аналогично $\angle N = 60° \Rightarrow \triangle MAN$ – равносторонний $\Rightarrow AM = AN = MN$. Также $\triangle MED$ и $\triangle CBN$ – равносторон. $\Rightarrow ME = ED = MD = a$, а $BC = BN = CN = b$. Тогда $6 + b = 4 + a + b = 7 + a$.

$4 + a + b = 7 + a$
$b = 3$

$6 + b = 4 + a + b$
$a = 2$.

$6 + b = 4 + a$
$b - a = 1$.

$\begin{cases} b = 3 \\ a = 2 \\ b - a = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a = 2 \\ b = 3. \end{matrix} \Rightarrow$ сторона $\triangle = 9$.

Теперь поймём, что искомое расстояние – высота равностор. $\triangle \Rightarrow$ она равна $\frac{9\sqrt{3}}{2}$.

Ответ: $\frac{9\sqrt{3}}{2}$.

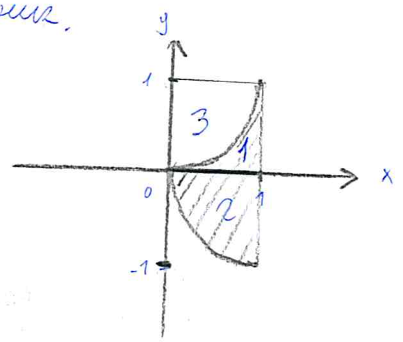
③

$(y+\sqrt{x})(y-x^2)\sqrt{1-x} \le 0$ Отсюда $x \geq 0$ $x \leq 1$.

$\sqrt{1-x}$ всегда ≥ 0 => нам нужно, чтобы $(y+\sqrt{x})(y-x^2) \le 0$. Это возможно если

$-\sqrt{x} \le y \le x^2$

Построим график.



искомое множество точек закрашено штрихом

Теперь поймем что фигура 2 равна фигуре 3, т.к. $-\sqrt{x}$ образует такую же фигуру, как и $\sqrt{x}$, а $\sqrt{x}$ симметричен x^2 относительно прямой $y=x$. => фигура 2 равна фигуре 3, т.к. мы её получили относительно двух симметрий: 1) отн. OX 2) отн. $y=x$.

=> теперь надо найти площадь фигуры 1 + S фигуры 2, а это квадрат со стороной 1. => $S=1\cdot 1=1$.

Ответ: 1.

④

Пусть каждый ребёнок получил m конфет.

Они могли дарить от 0 до N−1 подарка, но каждый из N человек подарил разное кол-во, а от 0 до N−1 N вариантов => все возможные кол-ва подарков были взяты 1 раз. А всего подаренного было

$0+1+2+\dots+(N-1)=\frac{N(N-1)}{2}=\frac{N(N-1)}{2}$ => $mN=\frac{N(N-1)}{2}$

$N^2-N=2mN$

$N(N-1-2m)=0$

$N=0$ $N=2m+1$.

$N>1$ => $N\neq 0$ и $m>0$

Получается что $N=2m+1$, где $m>0$

Ответ: при всех нечетных $N \geqslant 3$

5

~~Дано~~

$n^3+13n-243=m^3$

~~Рассмотрим его по модулю 7.~~

~~$n^3+13n-243=m^3$~~

~~1~~	~~+~~	~~6~~	~~0~~	~~1~~
~~1~~	~~+~~	~~5~~		~~6~~
~~6~~	~~+~~	~~4~~		~~0~~
~~1~~	~~+~~	~~3~~		
~~6~~	~~+~~	~~2~~		
~~6~~	~~+~~	~~1~~		
~~0~~	~~+~~	~~0~~		

~~$n^3+13n-243$ дает остатки от деления на 7.~~

$n^3+13n-243=m^3$

при $n=21$

$21^3+273-273=m^3$

$21^3=m^3$

$\underline{m=21}$

Значит 21-кубоватое число.

Ответ: 21.

Кельмотович 3 из 3