

Шифр

М-037

1	2	3	4	5	Итого

№1

Заметим, что на рисунке изображены прямые 3 вида (прямые одного вида параллельны) чтобы посчитать пересечений нужно взять по 1 прямой каждого вида. Прямых одного вида - 6. Поэтому вариантов $6 \cdot 5 = 15$. Заметим, что треугольник получится не всегда. Его не будет тогда и только тогда, когда прямые пересекаются в одной точке (одна точка). (т.к. одна т. пересечения есть между 2-мя прямыми). Если 3-я не будет через нее проводить мы получим треугольник). Поэтому, число треугольников будет равно разности $15 - 6 = 9$. Кол-во пересечений точек, в которых пересекаются 3 прямые, $15 - 6 = 9$. Кол-во треугольников - $9 \cdot 2 = 18$. $18 \cdot 3 = 54$. $54 - 6 = 48$. $48 \cdot 2 = 96$. $96 - 6 = 90$. $90 \cdot 2 = 180$. $180 - 6 = 174$. $174 \cdot 2 = 348$. $348 - 6 = 342$. $342 \cdot 2 = 684$. $684 - 6 = 678$. $678 \cdot 2 = 1356$. $1356 - 6 = 1350$. $1350 \cdot 2 = 2700$. $2700 - 6 = 2694$. $2694 \cdot 2 = 5388$. $5388 - 6 = 5382$. $5382 \cdot 2 = 10764$. $10764 - 6 = 10758$. $10758 \cdot 2 = 21516$. $21516 - 6 = 21510$. $21510 \cdot 2 = 43020$. $43020 - 6 = 43014$. $43014 \cdot 2 = 86028$. $86028 - 6 = 86022$. $86022 \cdot 2 = 172044$. $172044 - 6 = 172038$. $172038 \cdot 2 = 344076$. $344076 - 6 = 344070$. $344070 \cdot 2 = 688140$. $688140 - 6 = 688134$. $688134 \cdot 2 = 1376268$. $1376268 - 6 = 1376262$. $1376262 \cdot 2 = 2752524$. $2752524 - 6 = 2752518$. $2752518 \cdot 2 = 5505036$. $5505036 - 6 = 5505030$. $5505030 \cdot 2 = 11010060$. $11010060 - 6 = 11010054$. $11010054 \cdot 2 = 22020108$. $22020108 - 6 = 22020102$. $22020102 \cdot 2 = 44040204$. $44040204 - 6 = 44040198$. $44040198 \cdot 2 = 88080396$. $88080396 - 6 = 88080390$. $88080390 \cdot 2 = 176160780$. $176160780 - 6 = 176160774$. $176160774 \cdot 2 = 352321548$. $352321548 - 6 = 352321542$. $352321542 \cdot 2 = 704643084$. $704643084 - 6 = 704643078$. $704643078 \cdot 2 = 1409286156$. $1409286156 - 6 = 1409286150$. $1409286150 \cdot 2 = 2818572300$. $2818572300 - 6 = 2818572294$. $2818572294 \cdot 2 = 5637144588$. $5637144588 - 6 = 5637144582$. $5637144582 \cdot 2 = 11274289164$. $11274289164 - 6 = 11274289158$. $11274289158 \cdot 2 = 22548578316$. $22548578316 - 6 = 22548578310$. $22548578310 \cdot 2 = 45097156620$. $45097156620 - 6 = 45097156614$. $45097156614 \cdot 2 = 90194313228$. $90194313228 - 6 = 90194313222$. $90194313222 \cdot 2 = 180388626444$. $180388626444 - 6 = 180388626438$. $180388626438 \cdot 2 = 360777252876$. $360777252876 - 6 = 360777252870$. $360777252870 \cdot 2 = 721554505740$. $721554505740 - 6 = 721554505734$. $721554505734 \cdot 2 = 1443109011468$. $1443109011468 - 6 = 1443109011462$. $1443109011462 \cdot 2 = 2886218022924$. $2886218022924 - 6 = 2886218022918$. $2886218022918 \cdot 2 = 5772436045836$. $5772436045836 - 6 = 5772436045830$. $5772436045830 \cdot 2 = 11544872091660$. $11544872091660 - 6 = 11544872091654$. $11544872091654 \cdot 2 = 23089744183308$. $23089744183308 - 6 = 23089744183302$. $23089744183302 \cdot 2 = 46179488366604$. $46179488366604 - 6 = 46179488366600$. $46179488366600 \cdot 2 = 92358976733200$. $92358976733200 - 6 = 92358976733194$. $92358976733194 \cdot 2 = 184717953466388$. $184717953466388 - 6 = 184717953466382$. $184717953466382 \cdot 2 = 369435906932764$. $369435906932764 - 6 = 369435906932758$. $369435906932758 \cdot 2 = 738871813865516$. $738871813865516 - 6 = 738871813865510$. $738871813865510 \cdot 2 = 1477743627731020$. $1477743627731020 - 6 = 1477743627731014$. $1477743627731014 \cdot 2 = 2955487255462028$. $2955487255462028 - 6 = 2955487255462022$. $2955487255462022 \cdot 2 = 5910974510924044$. $5910974510924044 - 6 = 5910974510924038$. $5910974510924038 \cdot 2 = 11821949021848076$. $11821949021848076 - 6 = 11821949021848070$. $11821949021848070 \cdot 2 = 23643898043696140$. $23643898043696140 - 6 = 23643898043696134$. $23643898043696134 \cdot 2 = 47287796087392268$. $47287796087392268 - 6 = 47287796087392262$. $47287796087392262 \cdot 2 = 94575592174784524$. $94575592174784524 - 6 = 94575592174784518$. $94575592174784518 \cdot 2 = 189151184349569036$. $189151184349569036 - 6 = 189151184349569030$. $189151184349569030 \cdot 2 = 378302368699138060$. $378302368699138060 - 6 = 378302368699138054$. $378302368699138054 \cdot 2 = 756604737398276108$. $756604737398276108 - 6 = 756604737398276102$. $756604737398276102 \cdot 2 = 1513209474796552204$. $1513209474796552204 - 6 = 1513209474796552198$. $1513209474796552198 \cdot 2 = 3026418949593104396$. $3026418949593104396 - 6 = 3026418949593104390$. $3026418949593104390 \cdot 2 = 6052837899186208780$. $6052837899186208780 - 6 = 6052837899186208774$. $6052837899186208774 \cdot 2 = 12105675798372417548$. $12105675798372417548 - 6 = 12105675798372417542$. $12105675798372417542 \cdot 2 = 24211351596744835084$. $24211351596744835084 - 6 = 24211351596744835078$. $24211351596744835078 \cdot 2 = 48422703193489670156$. $48422703193489670156 - 6 = 48422703193489670150$. $48422703193489670150 \cdot 2 = 96845406386979340300$. $96845406386979340300 - 6 = 96845406386979340294$. $96845406386979340294 \cdot 2 = 193690812773958680588$. $193690812773958680588 - 6 = 193690812773958680582$. $193690812773958680582 \cdot 2 = 387381625547917361164$. $387381625547917361164 - 6 = 387381625547917361158$. $387381625547917361158 \cdot 2 = 774763251095834722316$. $774763251095834722316 - 6 = 774763251095834722310$. $774763251095834722310 \cdot 2 = 1549526502191669444620$. $1549526502191669444620 - 6 = 1549526502191669444614$. $1549526502191669444614 \cdot 2 = 3099053004383338889228$. $3099053004383338889228 - 6 = 3099053004383338889222$. $3099053004383338889222 \cdot 2 = 6198106008766677778444$. $6198106008766677778444 - 6 = 6198106008766677778438$. $6198106008766677778438 \cdot 2 = 12396212017533355556876$. $12396212017533355556876 - 6 = 12396212017533355556870$. $12396212017533355556870 \cdot 2 = 24792424035066711113740$. $24792424035066711113740 - 6 = 24792424035066711113734$. $24792424035066711113734 \cdot 2 = 49584848070133422227468$. $49584848070133422227468 - 6 = 49584848070133422227462$. $49584848070133422227462 \cdot 2 = 99169696140266844454924$. $99169696140266844454924 - 6 = 99169696140266844454918$. $99169696140266844454918 \cdot 2 = 198339392280533688909836$. $198339392280533688909836 - 6 = 198339392280533688909830$. $198339392280533688909830 \cdot 2 = 396678784561067377819660$. $396678784561067377819660 - 6 = 396678784561067377819654$. $396678784561067377819654 \cdot 2 = 793357569122134755639308$. $793357569122134755639308 - 6 = 793357569122134755639302$. $793357569122134755639302 \cdot 2 = 1586715138244269511278604$. $1586715138244269511278604 - 6 = 1586715138244269511278598$. $1586715138244269511278598 \cdot 2 = 3173430276488539022557196$. $3173430276488539022557196 - 6 = 3173430276488539022557190$. $3173430276488539022557190 \cdot 2 = 6346860552977078045114380$. $6346860552977078045114380 - 6 = 6346860552977078045114374$. $6346860552977078045114374 \cdot 2 = 12693721105954156090228748$. $12693721105954156090228748 - 6 = 12693721105954156090228742$. $12693721105954156090228742 \cdot 2 = 25387442211908312180457484$. $25387442211908312180457484 - 6 = 25387442211908312180457478$. $25387442211908312180457478 \cdot 2 = 50774884423816624360914956$. $50774884423816624360914956 - 6 = 50774884423816624360914950$. $50774884423816624360914950 \cdot 2 = 101549768847633248721829900$. $101549768847633248721829900 - 6 = 101549768847633248721829894$. $101549768847633248721829894 \cdot 2 = 203099537695266497443659788$. $203099537695266497443659788 - 6 = 203099537695266497443659782$. $203099537695266497443659782 \cdot 2 = 406199075390532994887319564$. $406199075390532994887319564 - 6 = 406199075390532994887319558$. $406199075390532994887319558 \cdot 2 = 812398150781065989774639116$. $812398150781065989774639116 - 6 = 812398150781065989774639110$. $812398150781065989774639110 \cdot 2 = 1624796301562131979549278220$. $1624796301562131979549278220 - 6 = 1624796301562131979549278214$. $1624796301562131979549278214 \cdot 2 = 3249592603124263959098556428$. $3249592603124263959098556428 - 6 = 3249592603124263959098556422$. $3249592603124263959098556422 \cdot 2 = 6499185206248527918197112844$. $6499185206248527918197112844 - 6 = 6499185206248527918197112838$. $6499185206248527918197112838 \cdot 2 = 12998370412497055836394225676$. $12998370412497055836394225676 - 6 = 12998370412497055836394225670$. $12998370412497055836394225670 \cdot 2 = 25996740824994111672788451340$. $25996740824994111672788451340 - 6 = 25996740824994111672788451334$. $25996740824994111672788451334 \cdot 2 = 51993481649988223345576902668$. $51993481649988223345576902668 - 6 = 51993481649988223345576902662$. $51993481649988223345576902662 \cdot 2 = 103986963299976446691153805324$. $103986963299976446691153805324 - 6 = 103986963299976446691153805318$. $103986963299976446691153805318 \cdot 2 = 207973926599952893382307610636$. $207973926599952893382307610636 - 6 = 207973926599952893382307610630$. $207973926599952893382307610630 \cdot 2 = 415947853199905786764615221260$. $415947853199905786764615221260 - 6 = 415947853199905786764615221254$. $415947853199905786764615221254 \cdot 2 = 831895706399811573529230442508$. $831895706399811573529230442508 - 6 = 831895706399811573529230442502$. $831895706399811573529230442502 \cdot 2 = 1663791412799623147058460885004$. $1663791412799623147058460885004 - 6 = 1663791412799623147058460885000$. $1663791412799623147058460885000 \cdot 2 = 3327582825599246294116921770000$. $3327582825599246294116921770000 - 6 = 3327582825599246294116921769994$. $3327582825599246294116921769994 \cdot 2 = 6655165651198492588233843539988$. $6655165651198492588233843539988 - 6 = 6655165651198492588233843539982$. $6655165651198492588233843539982 \cdot 2 = 13310331302396985176467687079964$. $13310331302396985176467687079964 - 6 = 13310331302396985176467687079958$. $13310331302396985176467687079958 \cdot 2 = 26620662604793970352935374159916$. $26620662604793970352935374159916 - 6 = 26620662604793970352935374159910$. $26620662604793970352935374159910 \cdot 2 = 53241325209587940705870748319820$. $53241325209587940705870748319820 - 6 = 53241325209587940705870748319814$. $53241325209587940705870748319814 \cdot 2 = 106482650419175881411741496639628$. $106482650419175881411741496639628 - 6 = 106482650419175881411741496639622$. $106482650419175881411741496639622 \cdot 2 = 212965300838351762823482993279244$. $212965300838351762823482993279244 - 6 = 212965300838351762823482993279238$. $212965300838351762823482993279238 \cdot 2 = 425930601676703525646965986558476$. $425930601676703525646965986558476 - 6 = 425930601676703525646965986558470$. $425930601676703525646965986558470 \cdot 2 = 851861203353407051293931973116940$. $851861203353407051293931973116940 - 6 = 851861203353407051293931973116934$. $851861203353407051293931973116934 \cdot 2 = 1703722406706814102587863946233868$. $1703722406706814102587863946233868 - 6 = 1703722406706814102587863946233862$. $1703722406706814102587863946233862 \cdot 2 = 3407444813413628205175727892467724$. $3407444813413628205175727892467724 - 6 = 3407444813413628205175727892467718$. $3407444813413628205175727892467718 \cdot 2 = 6814889626827256410351455784935436$. $6814889626827256410351455784935436 - 6 = 6814889626827256410351455784935430$. $6814889626827256410351455784935430 \cdot 2 = 13629779253654512820702911569870860$. $13629779253654512820702911569870860 - 6 = 13629779253654512820702911569870854$. $13629779253654512820702911569870854 \cdot 2 = 27259558507309025641405823139741708$. $27259558507309025641405823139741708 - 6 = 27259558507309025641405823139741702$. $27259558507309025641405823139741702 \cdot 2 = 54519117014618051282811646279483404$. $54519117014618051282811646279483404 - 6 = 54519117014618051282811646279483400$. $54519117014618051282811646279483400 \cdot 2 = 109038234029236102565623292558966800$. $109038234029236102565623292558966800 - 6 = 109038234029236102565623292558966794$. $109038234029236102565623292558966794 \cdot 2 = 218076468058472205131246585117933588$. $218076468058472205131246585117933588 - 6 = 218076468058472205131246585117933582$. $218076468058472205131246585117933582 \cdot 2 = 436152936116944410262493170235867164$. $436152936116944410262493170235867164 - 6 = 436152936116944410262493170235867158$. $436152936116944410262493170235867158 \cdot 2 = 872305872233888820524986340471734316$. $872305872233888820524986340471734316 - 6 = 872305872233888820524986340471734310$. $872305872233888820524986340471734310 \cdot 2 = 1744611744467777641049972680943468620$. $1744611744467777641049972680943468620 - 6 = 1744611744467777641049972680943468614$. $1744611744467777641049972680943468614 \cdot 2 = 3489223488935555282099945361886937228$. $3489223488935555282099945361886937228 - 6 = 3489223488935555282099945361886937222$. $3489223488935555282099945361886937222 \cdot 2 = 69784469778711105641$

$\sqrt{x} \in \mathbb{R}$

$$(y + \sqrt{x})(y - x^2) \sqrt{1-x} \leq 0$$

$\sqrt{x}$ и $\sqrt{1-x}$ существуют $\Rightarrow x \in [0, 1]$

Если $x=1$, то всё выражение равно 0, что нам подходит.

$x < 1$,

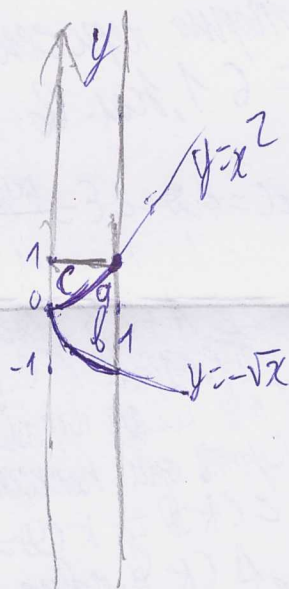
$$\sqrt{1-x} > 0$$

$$y + \sqrt{x} \geq y \geq y - x^2$$

$$(y + \sqrt{x})(y - x^2) \leq 0 \text{ (т.к. } \sqrt{1-x} > 0)$$

$$\begin{cases} y + \sqrt{x} \geq 0 \\ y - x^2 \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y \geq -\sqrt{x} \\ y \leq x^2 \end{cases}$$



т.к. $x \in [0, 1]$, то
неравенствам будут удовлетво-
рять область d и b . Если
нужно найти площадь этой
области.

В системе $y(x)$ область c заштрихована между $y=1$; $x=0$; $y=x^2$.

В системе $x(y)$ область b заштрихована между $x=1$; $y=0$; $x=y^2$.

Точка при повороте в м. 0 на ось y нас Φ перейдем в с (т.к. ось x перейдет в ось y)

Тогда площадь d и b равна площади d и c . А она равна

площади квадрата со стороной 1, т.е. 1.

Ответ: 1

$w \in V$ ~~дети-вершины~~.
 П.к. каждый подарил другу $\in V$ подарок, то всего ~~он~~ ^{каждый} подарил $\in V$ $N-1$ подарков. С другой стороны ~~он~~ каждый подарил ≥ 0 подарков.
 Поскольку все дарим различное количество подарков, они дарим $0, 1, \dots, N-1$ подарок соответственно. Тогда всего было подарено: $1 + \dots + N-1 = \frac{N(N-1)}{2}$
 (с другой стороны подарено $N \cdot x$, где x - кол-во подарков, которое получил каждый: $x \in V$)

$$Nx = \frac{N(N-1)}{2} \quad | : N \neq 0$$

$$N = 2x + 1$$

Значит, N - нечетно.

Построим пример по индукции.

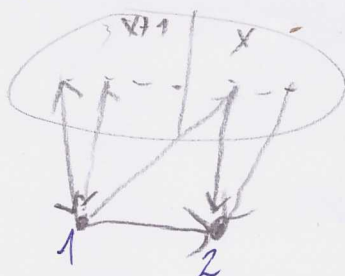
Базис $n=3$.



~~дети-вершины~~
 стрелка означает подарок. Каждый получил 1, а отправил они 0, 1, 2.

Предположим: Пусть для $N=2x+1$ есть пример, при этом каждый получил x подарков.

Переход: Построим пример на $N=2x+3$ где каждый получит $x+1$ подарок. Возьмем $2x+1$ вершину и ~~подарки~~ проведем ребра по предположению индукции:



$2x$ степени $0, \dots, 2x$.
 Из 1-ой вершины проведем ребра во все. Из $x+1$ вершины, из тех которые мы взяли ~~уже~~ изначально, проведем в 1 -ю. А из других x вершин проведем ребра во 2 -ю.

Степень 1 - $2x+2$; Степень 2 - 0 , Степени остальных были $0, \dots, 2x$, а теперь степень каждой увеличилась на 1: $1, \dots, 2x+1$. Все степени разные, и каждый получил $x+1$ подарок. Остальные получили x по предположению и еще $x+1$ от 1-ой вершины. Значит все получили $x+1$ подарок.
 Значит, мы построили пример на $2x+3$ вершинах, где каждый получил $x+1$ подарок.
 Переход доказан.

Ответ: Все нечетные N , большие 1.

№5

Есть 3 случая:

$$1) n^3 + 13n - 243 = n^3$$

$$n = \frac{243}{13} = 21$$

$$2) n^3 + 13n - 243 > n^3$$

$$n^3 + 13n - 243 > (n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$$

$$3n^2 - 10n + 244 \leq 0$$

$$\Delta = 3n^2 - 10n + 244 = (n^2 - 10n + 25) + 2n^2 + 244 = (n-5)^2 + 2n^2 + 244 > 0$$

Трехчлен

$$3) n^3 + 13n - 243 < n^3$$

$$n^3 + 13n - 243 < (n-1)^3 = n^3 - 3n^2 + 3n - 1$$

$$3n^2 + 10n \leq 242$$

$f(n) = 3n^2 + 10n$ — возрастающая функция

Если $n > 8$, то $f(n) > 192 + 80 = 272$

Значит $n \leq 8$

По условию $n^3 + 13n - 243 = x, x > 0$

$$n^3 + 13n > 243$$

$g(n) = n^3 + 13n$ — возраст. функц.

При $n \leq 5$, $g(n) \leq 125 + 65 = 190 < 243$

Если $n = 6$, то $n^3 + 13n - 243 = 21$ (не является кубом)

Если $n = 7$, то $n^3 + 13n - 243 = 343 + 91 - 243 = 191$ (не является кубом)

Если $n = 8$, то $n^3 + 13n - 243 = 512 + 104 - 243 = 373$ (не является кубом)

Значит, кубовые числа — это 8 и 21.

Их сумма: $21 + 8 = 29$

Ответ: 29.