

Посчитаем треугольники всех размеров. Треугольников, состоящих из одного треугольника - 120. Будем считать, что все они равны и равносторонние, причем длина стороны каждой ≈ 1 . Также считаем, что все треуг. - равносторонние (это не меняет их количества). Треугольников со стороной 2 (из 4-х треугольников) - 114, со стороной 3 - 104, со стороной 4 - 90, со стороной 5 - 72, со стороной 6 - 56, со стороной 7 - 42, со стороной 8 - 30, со стороной 9 - 20, со стороной 10 - 12, со стороной 11 - 6, со стороной 12 - 2. Итого: $120 + 114 + 104 + 90 + 72 + 56 + 42 + 30 + 20 + 12 + 6 + 2 = 668$.

Ответ: 668 треугольников.

Дано:
 $\triangle ABCDE$ - вып.

$\angle A = 60^\circ$

$\angle B = \angle C = \angle D = \angle E$

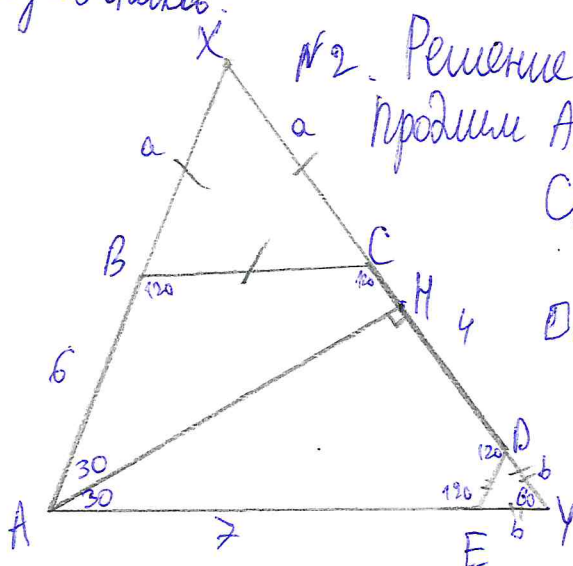
$AB = 6$

$CD = 4$

$EA = 7$

Найти:

$AH = ?$



№2. Решение: $\angle B = \frac{540 - 60}{4} = \angle C = \angle D = \angle E = 120^\circ$.

Продлим AB и CD до пересечения, CD и AE до пересечения.

$AB \cap CD = X$; $CD \cap AE = Y$.

ВАНДЕ: $90 + 120 + 120 + \angle HAE = 360 \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle HAE = 30^\circ \Rightarrow \angle AHE = 60 - 30 = 30^\circ$.

$\angle EDY = 180 - 120 = 60^\circ$ (по св. см. $\angle$).

$\angle DEY = 180 - 120 = 60^\circ$ (по св. см. $\angle$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle DEY$ - р/с, $\angle DYE = 60^\circ \Rightarrow \angle X = 60^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle XAY$ - р/с (по уг.). $\angle XBC = \angle XCB = 180 - 120 = 60^\circ$ (по св. см. $\angle$).

$\angle XE \angle AXE = 60^\circ \Rightarrow \triangle XBC$ - р/с (по уг.) $\Rightarrow XB = XC = BC$ (по отр.).

$\triangle DEY$ - р/с $\Rightarrow DE = EY = DY$ (по отр.). $\triangle AXE$ - р/с $\Rightarrow AX = XY = AY$ (по отр.).

Пусть $XB = a$, $DE = b$. Тогда $7 + b = 6 + a \Rightarrow a = b + 1$.

$a + 4 + b = a + 6 \Rightarrow b = 2$, $\Rightarrow a = b + 1 = 3$. Отсюда $AY = 7 + b = 9$, $HY = 4 + b = 6$.

Тогда $AH^2 = AY^2 - HY^2$ (по теор. Пифагора) $= 81 - 36 = 45$.

Тогда $AH = AY \cdot \sin \angle HYA = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 9$.

Ответ: $AH = \frac{9\sqrt{3}}{2}$.

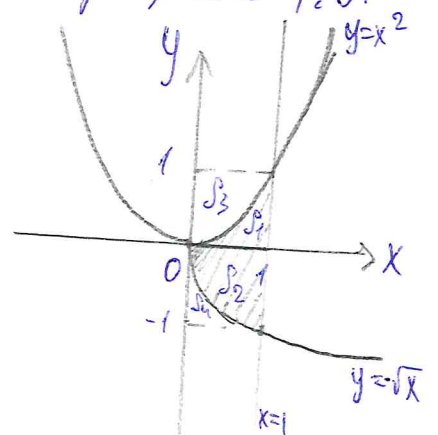
Поскольку никому не выдан более $\frac{N-1}{2}$ подарков, т.е. $N-3$ "дыры", то мы в эти "дыры" заменим $(a_i \rightarrow a_i)$ a_i на a_N , остальные ~~цифры~~ заменим a_N тоже. Но может возникнуть дыра $a_N \rightarrow a_N$ (т.е. a_N дарит $N-1$ подарков), то мы закроем все "дыры".
 ~~$a_N \rightarrow a_N$ и меняем тех, кто дарит: $a_{N-1} \rightarrow a_N$ (при этом a_{N-1} подарит ровно 1 подарок) и $a_N \rightarrow a_{N-2}$ какому-то a_k подарок от a_N не подарим (a_N дарит $N-2$ подарков, $N-1$ дыр). Если $k = N-1$, то возьмем пару $a_N \rightarrow a_N$ и $a_{N-2} \rightarrow a_{N-1}$ и преобразуем в $a_{N-2} \rightarrow a_N$, $a_N \rightarrow a_{N-1}$. При этом (из примера) очевидно, что a_{N-2} до преобразования не дарил подарок a_N , а a_N не дарил подарок a_{N-1} по предположению. Если $k < N-1$ (~~$k \leq N-1$~~). ($k > N-1$ - не может быть), то берем пару $a_{N-1} \rightarrow a_k$, $a_N \rightarrow a_N$ и преобразуем в $a_{N-1} \rightarrow a_N$, $a_N \rightarrow a_k$. При этом a_N еще не дарил подарок a_k -ому, а (из предположения), а a_{N-1} - не дарил a_N -ому (из примера, a_{N-1} дарит всем a_i , где $i \in \{1, 2, \dots, N-2\}$). Тогда все получая $\frac{N-1}{2}$ подарков, т.е. т.д.~~

№3.

$$(y + \sqrt{x})(y - x^2)\sqrt{1-x} \leq 0. \quad \text{ОДЗ: } x \leq 1.$$

$x = 1$ - подходит.

$$\sqrt{1-x} \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} (y + \sqrt{x})(y - x^2) \leq 0 & (\text{поделим на } \sqrt{1-x}). \\ x = 1 \end{cases}$$



Построим ~~графики~~ функций $y = -\sqrt{x}$; $y = x^2$; $x = 1$. Заметим, что подходит только заштрихованный участок и прямая $x = 1$. Площадь прямой $= 0$. Найдём S заштрихованной части. Повернем ~~этот~~ график функции $y = -\sqrt{x}$ на 90° против часовой стрелки относительно т.О. Прямая $y = -\sqrt{x} \rightarrow x = \sqrt{y}$, т.е. $y = x^2$, $x \geq 0$. Тогда $S_2 = S_3$. $S_3 + S_1 = 1 \Rightarrow S_2 + S_1 = 1$ (т.к. график функции $y = -\sqrt{x}$ при повороте переходит в часть графика функции $y = x^2$ справа от оси ординат).

Ответ: $S_1 + S_2 = 1$.

N детей. Один ребенок может подарить от 0 до $N-1$ подарков — это ровно N вариантов. Всего — N детей, все дарим разное число подарков $\Rightarrow$ каждый ребенок подарил подарков от 0 до $N-1$, никакие 2-не од. $\Rightarrow$ все числа варианты от 0 подарков до $N-1$ — присутствуют $\Rightarrow$ сумма всех подарков = $0+1+\dots+N-1 = \frac{N(N-1)}{2}$.

Пусть N — четное. Тогда $N-1 \neq 2 \Rightarrow \frac{N(N-1)}{2} \neq N$, но все дети получили поровну подарков $\Rightarrow \frac{N(N-1)}{2} \div N$, противоречие $\Rightarrow N$ — нечетное.

Обозначим детей, как $a_0, a_1, a_2, \dots, a_{N-1}$, где a_i подарил 0 подарков, $\dots, a_{i-1}$ — подарил $i-1$ подарков.

Докажем, что если N — нечетно, то условие задачи возможно.

Построим пример, где $a_i \rightarrow a_j$ означает, что ребенок a_i подарил подарок ребенку a_j .

Пример:

$a_{N-1} \rightarrow a_0, a_{N-1} \rightarrow a_1, \dots; a_{N-1} \rightarrow a_{N-2}, a_{N-2} \rightarrow a_{N-1}, a_{N-2} \rightarrow a_0, \dots, a_{N-2} \rightarrow a_{N-4}; a_{N-4} \rightarrow a_{N-3}, a_{N-4} \rightarrow a_{N-2}, \dots, a_{N-4} \rightarrow$

$a_{N-1} \rightarrow a_1, a_{N-1} \rightarrow a_2, \dots, a_{N-1} \rightarrow a_{N-2}; a_{N-2} \rightarrow a_{N-1}, a_{N-2} \rightarrow a_N, \dots, a_{N-2} \rightarrow a_{N-5}, a_{N-3} \rightarrow$

и так далее будем раздавать подарки. ~~не раздавая~~ Мими a_N дарит последним. То есть раздаем подарки сначала всем ~~по порядку~~ от a_{N-1} , затем продолжаем их по

порядку раздавать от $a_{N-2}, \dots$. Если циклы закончатся, начинаем его заново. Но может возникнуть проблема, когда a_i по порядку должен дарить подарок самому себе. Тогда мы просто пропускаем это действие (и a_i дарит подарок a_{i+1}), образуя тем

самым "жору". Замечаем, что когда мы раздадим так подарки всем детям, кроме a_N , у нас будет не более $N-2$ "жор" (может быть max 1 "жор" с каждым из N ребенком, т.к. любой ребенок дарит $\leq N$ подарков, а "циклы" состоят из N человек), и нет "жор" у a_N и

a_{N-1}, a_{N-2} очевидно (из примера). Поскольку мы раздавали всё по циклу, то суммарно мы "принесли" max. $(N-3) + (N-2) + (N-3) + \dots + 1 = N-3 + \frac{(N-2)(N-1)}{2}$ т.е. никому не выдали

более $\frac{N-1}{2}$ подарков (иначе, если хотя бы $\frac{N+1}{2}$, суммарно min. $\frac{N-1}{2} \cdot (N-1) + \frac{N+1}{2} =$

$= \frac{N^2 - 2N + 1 + N + 1}{2} = \frac{N^2 - N + 2}{2} > N-3 + \frac{(N-2)(N-1)}{2} = \frac{2N-6 + N^2 - 3N + 2}{2} = \frac{N^2 - N - 4}{2}$, противоречие).

$n \in \mathbb{N}$. n -кубическое, если $n^3 + 13n - 273 = a^3$, где $a \in \mathbb{N}$.

1) Пусть $n > 21$.

Тогда $n^3 + 13n - 273 > n^3$.

$n^3 + 13n - 273 < (n+2)^3 = n^3 + 6n^2 + 12n + 8$, т.к. $6n^2 - n + 281 > 0$ ($D = 1 - 24 \cdot 281 < 0$), и при $n=0$ ур-е $> 0 \Rightarrow$ оно всегда > 0 .

Тогда $n^3 + 13n - 273 = (n+1)^3$, или n - не кубическое.

$$n^3 + 13n - 273 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 \Rightarrow 3n^2 - 10n + 274 = 0.$$

$D = 100 - 12 \cdot 274 < 0 \Rightarrow 3n^2 + 274 - 10n \neq 0$ ни при каком $n \Rightarrow$ если $n > 21$, то n - не кубическое.

2) $n \leq 21$, $n \in \mathbb{N}$.

а) $n=21$: $21^3 + 273 - 273 = 21^3$ - подходит.

б) $n \leq 21$:

Заметим, что если $n^3 + 13n - 273 \in \mathbb{N}$, то $n^3 + 13n - 273 > 0 \Rightarrow n \geq 6$ (если $n \leq 5 \Rightarrow n^3 + 13n \leq 125 + 65 < 273 \Rightarrow n^3 + 13n - 273 < 0$, противоречие).

Заметим, что $n^3 + 13n - 273 \equiv n^3 \pmod{13}$ (т.к. $13n \equiv 0, 273 \equiv 0$). Отсюда, если $n^3 + 13n - 273 = a^3$, то $a \equiv n \pmod{13}$.

1) $n=6$: $216 + 78 - 273 = 21$ - нет.

2) $n=7$: $343 + 91 - 273 = 161$ - нет.

3) $n=8$: $512 + 104 - 273 = 343 = 7^3$ - да.

4) $n=9$: $729 + 117 - 273 = 573$ - нет.

5) $n=10$: $1000 + 130 - 273 = 857$ - нет.

6) $n=11$: $1331 + 143 - 273 = 1201$ - нет.

Заметим, что при $n > 11$: $n^3 + 13n - 273 < n^3$, но $13n - 273 \geq -130 \Rightarrow 273 - 13n \leq 130$.

Пусть $n^3 + 13n - 273 = a^3 \Rightarrow n^3 - a^3 = (n-a)(n^2 + an + a^2) = 273 - 13n \Rightarrow (n-a)(n^2 + an + a^2) \leq 130$.

Если $n > a \Rightarrow n-a \geq 1$, $n^2 + an + a^2 \geq 11 \cdot 12 = 132 \Rightarrow (n-a)(n^2 + an + a^2) \geq 1 \cdot 132 > 130$, противоречие $\Rightarrow$ при $21 > n > 11$ - нет кубических чисел.

Тогда ~~нигде~~ числа кубические - только $n=8$ и $n=21$, их сумма = 29.

Ответ: 29.