Задача 1.

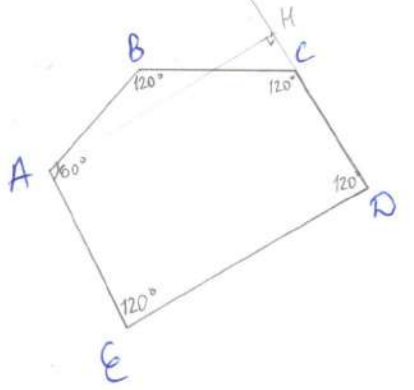
Посчитаем по-отдельности количество треугольников с разными сторонами.

1. Со стороной 1 → 120 шт.
2. Со стороной 2 → 114 шт
3. Со стороной 3 → 104 шт
4. Со стороной 4 → $45 \cdot 2 = 90$ шт
5. Со стороной 5 → $36 \cdot 2 = 72$ шт
6. Со стороной 6 → $28 \cdot 2 = 56$ шт
7. Со стороной 7 → $21 \cdot 2 = 42$ шт
8. Со стороной 8 → $15 \cdot 2 = 30$ шт
9. Со стороной 9 → $10 \cdot 2 = 20$ шт
10. Со стороной 10 → $6 \cdot 2 = 12$ шт
11. Со стороной 11 → $3 \cdot 2 = 6$ шт
12. Со стороной 12 → $1 \cdot 2 = 2$ шт

Всё сложим: $120 + 114 + 104 + 90 + 72 + 56 + 42 + 30 + 20 + 12 + 6 + 2 =$
$= 120 + 120 + 120 + 160 + 148 = 360 + 308 = 668.$

Ответ: Всего треугольников 668 шт.

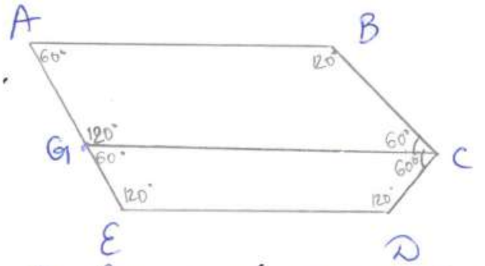
Задача 2



Дано:
$\angle A = 60°$
$\angle B = \angle C = \angle D = \angle E.$
$AB = 6$
$CD = 4$
$EA = 7$
$AH \perp CD$
$AH = ?$

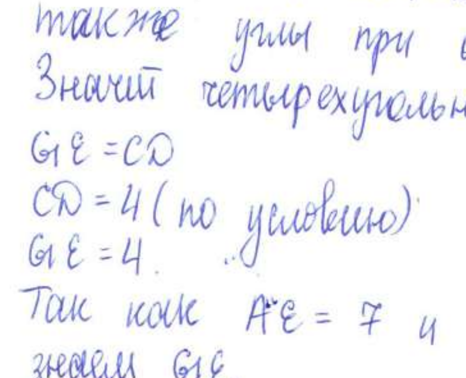
Решение:

1. Сумма углов в n-угольнике вычисляется по формуле $180°(n-2)$, где n – кол-во углов.
Посчитаем сумму углов в 5ти-угольнике.
$S = 180° \cdot (5-2) = 180° \cdot 3 = 540°.$
2. $\angle B + \angle C + \angle D + \angle E = 540° - \angle A.$
$\angle B + \angle C + \angle D + \angle E = 540° - 60° = 480°$
Так как оставшиеся углы равны между собой, то найдем чему они равны.
3. $\frac{480°}{4} = 120° = \angle B = \angle C = \angle D = \angle E.$
4. Посмотрим на прямые BC и AE и прямую AB:
$\angle EAB + \angle ABC = 60° + 120° = 180°$
Раз односторонние углы в сумме дают 180°, значит прямые BC и AE – параллельные.



5. Проведем из точки C биссектрису CG.
6. В четырехугольнике ABCG: $\angle AGC = 360° - \angle GAB - \angle ABC - \angle BCG$ (сумма углов в четырехугольнике)
$\angle AGC = 360° - 60° - 120° - 60° = 120°$
7. $\angle EGC = 180° - \angle AGC$ (тк они смежные)
$\angle EGC = 180° - 120° = 60°$

8. Рассмотрим четырехугольник $ABCG$:
$\angle AGC + \angle BCG = 120^\circ + 60^\circ = 180^\circ \Rightarrow$ прямые AG и BC параллельны, тк. односторонние углы в сумме дают 180° при секущей GC.
Аналогично с прямыми AB и GC.
Четырехугольник $ABCG$ – параллелограм по определению ($AB \parallel GC$ и $AG \parallel BC$).
9. По свойству параллелограма $AB = GC$
$AB = 6$ (по условию)
$GC = 6$.
10. Рассмотрим четырехугольник $GCDE$:
Тк. $AB \parallel GC$ и $AB \parallel ED$ (мы доказали это ранее), то и $GC \parallel ED$, также углы при основании GC равны ($\angle EGC = \angle GCD = 60^\circ$).
Значит четырехугольник $GCDE$ – равнобокая трапеция по определению.
$GE = CD$
$CD = 4$ (по условию)
$GE = 4$.
11. Так как $AE = 7$ и $AE = AG + EG$, то можем найти AG, тк знаем GE.
$AG = AE - GE$
$AG = 7 - 4 = 3$.
12. По свойству параллелограма $AG = BC$.
$BC = 3$.
13. Найдем высоту AH:



$\angle LCH = 60^\circ \Rightarrow \angle CLH = 30^\circ$ (сумма острых углов в прямоуг. Δ)
$\angle CLH = \angle ALG$ как вертикальные.
$\Rightarrow \angle ALG = 30^\circ$
$\angle GAL = 180^\circ - \angle AGL - \angle ALG$ (сумма углов в Δ)
$\angle GAL = 180^\circ - 120^\circ - 30^\circ = 30^\circ$
ΔAGL – равнобедренный, тк. равны углы $\angle GAL$ и $\angle ALG$ при основании AL.
$AG = 3 \Rightarrow GL = 3$.

$GC = 6. \Rightarrow LC = GC - GL$

$LC = 6 - 3 = 3.$

$CH = \frac{1}{2} LC$, т.к. в прямоугольном Δ напротив угла $= 30°$ лежит катет, равный половине гипотенузы.

$HC = \frac{1}{2} \cdot 3 = 1,5.$

По теореме Пифагора:

$CL^2 = LH^2 + HC^2$

$LH^2 = CL^2 - HC^2$

$LH^2 = 9 - 2,25 = 6,75.$

$LH = \sqrt{6,75} = \sqrt{\frac{675}{100}} = 0,1\sqrt{675} = 0,1 \cdot \sqrt{25 \cdot 27} = 0,1 \cdot 5 \cdot 3\sqrt{3} = 1,5\sqrt{3}.$

Также по теореме косинуса:

$AL^2 = AG^2 + GL^2 - 2 \cdot AG \cdot GL \cdot \cos\angle AGC.$

$AL^2 = 9 + 9 - 18\cos\angle 120°$

По формуле преведения ~~cos(180-~~ $\cos(180° - \alpha) = -\cos\alpha.$

$\cos 120° = \cos(180° - 60°) = -\cos 60° = -\frac{1}{2}.$

$AL^2 = 18 + 18 \cdot \frac{1}{2} = 18 + 9 = 27.$

$AL = \sqrt{27} = \sqrt{9 \cdot 3} = 3\sqrt{3}.$

$AH = AL + LH$

$AH = 3\sqrt{3} + 1,5\sqrt{3} = 4,5\sqrt{3}.$

Ответ: $AH = 4,5\sqrt{3}.$

Задача 3

$(y+\sqrt{x})(y-x^2)\sqrt{1-x} \le 0.$

Чтобы это выражение имело смысл, надо, чтобы $\sqrt{x} > 0$ и $\sqrt{1-x} > 0$.
Подкоренное выражение не должно быть отрицательным.
Значит:

$x \geq 0$ и $1-x \geq 0.$

$\begin{cases} x \geq 0. \\ 1-x \geq 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x \geq 0. \\ x \leq 1. \end{cases}$

$x \in [0; 1].$

Рассмотрим случай, когда $x=1$:

$(y+1)(y-1)\sqrt{1-1} \le 0.$

$(y^2-1)\cdot\sqrt{0} \le 0.$

$0\cdot(y^2-1) \le 0.$

$0=0.$ (и)

Значит при $x=1.$ $y \in R$

Значит ~~в~~ при $x=1.$ точек для y бесконечно много

Значит площадь множества точек будет бесконечной.

Ответ: ~~бес~~ площадь множества точек бесконечна.

Задача 4

Раз каждый человек подарил разное количество подарков, значит кол-во подаренных подарков разное.

Допустим, у нас есть N человек и каждый человек подарил хотябы 1 подарок.

Тогда последний человек (a_n) подарил все N подарков.

Но, либо он подарил кому-то хотябы 2 подарка (что не соответствует условию), либо подарил подарок себе (что тоже не может быть).

Значит, всегда есть такой человек, который подарков вообще не подарил.

Если у нас есть N человек, значит последний (a_n) подарил $N-1$ подарков. Первый (a_1) подарил 0, каждый последующий подарил на 1 больше.

Всего было подарено и получено:

$$0+1+2+\ldots+N-1 = \frac{N(N-1)}{2}$$ подарков.

Раз все получили поровну, значит каждый получил по $\frac{N(N-1)}{2N} = \frac{N-1}{2}$ подарка.

Тк подарки у нас не могут делиться и быть отрицательными, значит $\frac{N-1}{2} \in \mathbb{N}$.

$N-1 \vdots 2 \Rightarrow N$ - нечетное.

При нечетном кол-ве человек это возможно.

Процесс подарки подарков:

1. a_n человек дарит всем $N-1$ подарок. (У всех по 1ому, у a_n - 0)
2. a_{n-1} дарит a_n и остальным.
3. a_{n-2} дарит a_{n-1} и остальным.
4. a_i дарит a_{i+1} и остальным.

И так далее.

Также человеку дарят подарки, пока у него будет количество подарков $< \frac{N-1}{2}$.

Ответ: при нечетных N.

Задача 5

Допустим, $n^3+13n-273$ является кубом какого-нибудь натурального числа.

Тогда: $n^3+13n-273=k^3$, где $k \in \mathbb{N}$.

$n^3-k^3=273-13n$

$(n-k)(n^2+nk+k^2)=13(21-n)$

Раз произведения чисел равны, значит либо $n-k \vdots 13$, либо $n^2+nk+k^2 \vdots 13$.

$(n-k)(n^2+nk+k^2)+13(n-21)=0$.

1. $k=21$.

$n=21$.

Допустим $n^2+nk+k^2=0 \quad /:k^2$ ($k \neq 0$ по условию)

$$\left(\frac{n}{k}\right)^2+\frac{n}{k}+1=0.$$

$D<0$, значит нет корней.

Мы нашли, что $n=21$.

Ответ: сумма кубоватых чисел $=21$.