

№4.

- 1) Если все получили одинаковое кол-во подарков, то общее кол-во подарков : N .
- 2) Заметим, что т.к. каждому уч. можно дарить подарок не более одного раза, значит каждый мог подарить от 0 до $N-1$ подарков.
- 3) От 0 до $N-1$ - N вариантов. Если каждый ученик дарит разное кол-во подарков, то сформируем последовательность подарков числа от 0 до $N-1$ - встретится ровно по 1 разу.
- 4) Тогда сумма количеств подарков (т.е. кол-во подарков всего) = $\frac{N \cdot (N-1)}{2}$
- 5). Заметим, что при N четном, т.е. $N=2n$, $\frac{2n \cdot (2n-1)}{2} \cdot 2n$, т.к. $n \cdot (2n-1) \cdot 2n = \frac{2n-1}{2} \cdot 2n$ - т.е. не целое число.
- 6). При N -нечетном строим пример, как дети дарят подарки: разбиваем детей на

пары сж кон-вами $N-1$ и 1 , $N-2$ и 2 ,
 $\dots$ $N-k$ и k $\dots$. Теперь $N-1$ дарит
 всем, 1 дарит ему, i -ый человек
 в паре дарит сколько есть, а 2 -ой
 дарит оставшимся. И так в каж-
 дой паре (ка-то числ от 1 до $N-1$
 при четном N - бывает и пар
 без остатка). После каждой пары
 - у всех детей подарков одинако-
 во. После всех пар - у каждого буде-
 то $\frac{N-1}{2}$ подарков.
 Ответ: при четных N .

3

1). Заметим, что в выражении
 встречается $\sqrt{x}$ и $\sqrt{1-x}$ $\Rightarrow$ чтобы выра-
 жение имело смысл надо чтобы
 x был ≥ 0 , но $\leq 1 \Rightarrow x \in [0; 1]$.

2). Заметим что т.к. $\sqrt{1-x} \geq 0$ всегда $\Rightarrow$

$$(y + \sqrt{x})(y - x^2) \leq 0.$$

$$f(x) =$$

$$g(x) =$$

2 3) Построим графики $y = \sqrt{x}$ и $y = x^2$ и

посмотрим на них на отрезке $x \in [0; 1]$.

 - $f(x) \geq 0, g(x) \geq 0 \Rightarrow f(x)g(x) \geq 0$
(равенство достигается на линии графика $f(x)$.)

 - $f(x) \leq 0, g(x) \leq 0 \Rightarrow f(x)g(x) \geq 0$ (равенство достигается на линии графика $g(x)$.)

 - $f(x) \geq 0, g(x) \leq 0 \Rightarrow f(x)g(x) \leq 0$

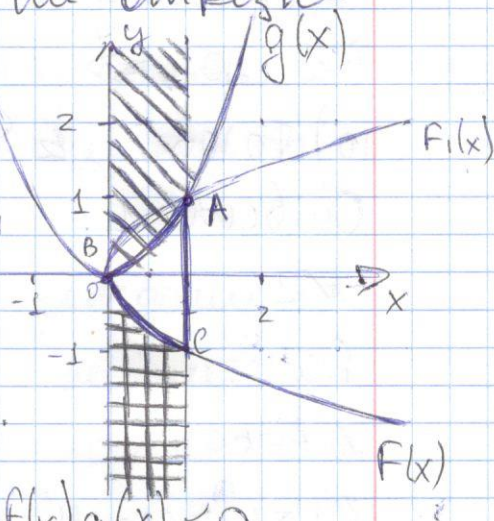
5) Значит нам подходит только участок обознач. белым.

6) Теперь отразим  $f(x)$ относительно Ox . Из полученного графика $f_1(x) = \sqrt{x}$

7) Теперь рассмотрим графики $f_1(x)$ и $g(x)$ на промежутке $x > 0; y > 0$.

8) На этом промежутке $y = \sqrt{x} \Leftrightarrow y^2 = x \Rightarrow f_1(x)$ и $g(x)$ - симметричны относительно прямой $y = x$

9) $\Rightarrow$ на промежутке $x > 0$ - $g(x)$ получается из $f_1(x)$ композицией 2 симметрий, одна между осями которых $= 45^\circ \Rightarrow 3$



$g(x)$ получается из $f(x)$ поворотом на 90° , $\Rightarrow$

10) Тогда S белой части $= S_{\triangle ABC} = 1$.
Ответ: 1.

$\sqrt{2}$.

Дано:

$$\angle A = 60^\circ$$

$$\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = \angle 4$$

$$AB = 6$$

$$CD = 4$$

$$EA = 7$$

$$AH \perp CM$$

Найти:

AH .

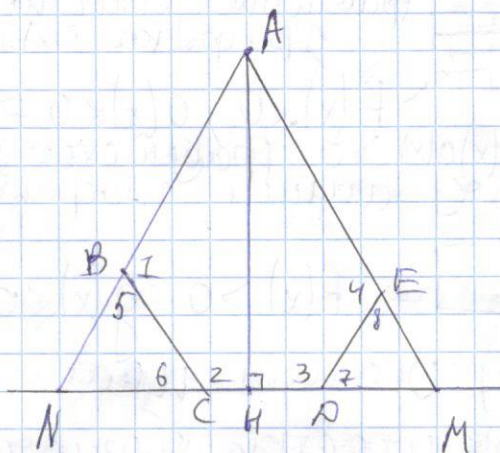
Решение:

1) Д/н: продолжим CD

2) Д/н: продолжим AB и AE до пересечения с CD в точках N и M соответственно.

$$3) \angle A + \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 = 3 \cdot 180 = 540$$

$$\angle 1 = \frac{540 - 60}{4} = 120^\circ = \angle 2 = \angle 3 = \angle 4$$



4). $\angle 5 = \angle 180 - \angle 1 = 120^\circ$ (смежные).

аналогично $\angle 5 = \angle 6 = 120^\circ \Rightarrow$

$\angle N = 180^\circ - \angle 5 - \angle 6 = 60^\circ \Rightarrow \triangle NBC - \text{равностор.}$

5) Аналогично пункту 4, находим, что $\angle 7 = \angle 8 = \angle M = 60^\circ \Rightarrow \triangle EDM - \text{равностор.}$

6). Рассмотрим $\triangle ANM$:

$\angle A = \angle N = \angle M = 60^\circ \Rightarrow \triangle ANM - \text{равносторонний} \Rightarrow$

$AN = NM = AM$

7). Пусть $NB = x \Rightarrow NC = x$ ($\triangle NBC - \text{равностор.}$)

Пусть $EM = y \Rightarrow DM = y$ (аналогично)

8) Тогда $AN = 6 + x$; $NM = 4 + x + y$; $AM = 7 + y$,
при этом $AN = NM = AM$ (см. пункт 6).

Тогда $6 + x = 4 + x + y \Rightarrow y = 2.$

$4 + x + y = 7 + y \Rightarrow x = 3.$

9). Тогда $AN = \sin \angle N \cdot AN$ (из прямоугольного $\triangle ANH$ ($\angle ANH = 90^\circ$ по у.с.))

$AN = \sqrt{3} \cdot 4,5.$

Ответ: $4,5 \sqrt{3}.$

н.с.

1) Назовем вершины ^{везде} A, B, C, D, E, F начиная

с самой левой. (Так что 2 нижних - F и E зыгата слева).

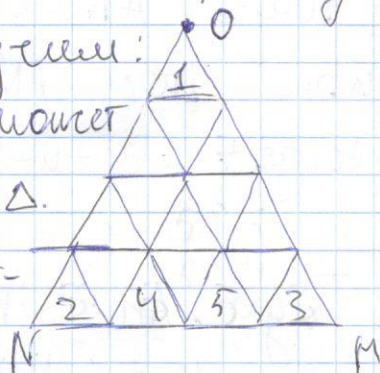
2). Посчитаем кол-во самых маленьких треугол со сторонами 1 - их 120.

3). Теперь будем считать маленькие треугольнички цепочкой лежащие в шестиугольнике образов. если у звездочки убрать лучики.

4). Теперь разобьем этот шестиугольник на шесть треугольничков (разобьем диагоналями проходящими через центр). Получим:

0 - центр. Тогда $\Delta 1$ может быть вершиной для Δ .

Имеем рассм. только Δ внутри $\square$).



5) $\Delta 2$ и $\Delta 3$ могут быть в Δ .

6) $\Delta 4$ и $\Delta 5$ тоже в Δ .

7). Считаю аналогично для всех маленьких треугольничков получили,

6.

что в сумме они могут быть в
96 треугольничках.

- 8) При этом больших Δ некоторые
мы разбили $\square - 6 \Rightarrow 96 \text{ по } 6$.

9) Но заметим, что т.о. мы каждый
 Δ посчитали 3 раза, поэтому
всего $\Delta \frac{96 \cdot 6}{3} = 192$.

10) Теперь будем считать не единичные
квадраты, которые не по-
падают в $\square$.

11) $2 \Delta - ACE$ и ΔBDF .

12) 8 Δ с вершиной А, аналогично для
ост. вершин итого: 50 Δ с верши-
нами в точках А, В, F.

13) Остальное $\Delta = 4 \cdot 5 \cdot 8 + 4 \cdot 7 = 408$.

14) Итого: $120 + 192 + 50 + 408 =$

~~13) Остальное $\Delta = 2 \cdot 5 + 1 + \frac{4}{3} + 2 \cdot 5 + 1$~~

13) Остальных $\Delta: (2 \cdot 5 + 2 \cdot 5 + 6 + 4 \cdot 2 + 2 \cdot 5)$.

$6 \neq (4 \cdot 4 + 3 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 4 \cdot 4) \cdot 2 = 96 + 264 = 360$

Итого: $120 + 192 + 50 + 354 = 716$ ~~720~~

ответ: ~~716~~ 720.

7.

№5.

1) Заметим, что $n^3 + 13n - 273$ - ~~меньше~~ не больше n^3 , если n - кубоватое.

2) Пусть это и так $\Rightarrow$

$$n^3 + 13n - 273 \geq (n+1)^3 \Rightarrow$$

$$13n - 273 \geq 3n^2 + 3n + 1 \Rightarrow$$

$$-3n^2 + 10n - 274 \geq 0, \text{ но уравнение}$$

$$-3n^2 + 10n - 274 = 0 \text{ не имеет корней,}$$

при этом ветви парабола направлены

вниз $\Rightarrow -3n^2 + 10n - 274 \geq 0$ - не имеет решений.

3) Тогда $n^3 + 13n - 273 \leq n^3$

$n=0$ подходит, наименьше.