

Шифр М - 005

1	2	3	4	5	Итого

502

На рисунке есть 3 вида линий:
 вертикальные, отклонённые от вертикальной на ~~отриц~~ угол $< 90^\circ$ по часовой стрелке и отклонённые от вертикальной на угол $\leq 90^\circ$ против часовой стрелки.

Назовём "отрезком" - ~~линию, по которой~~ ~~линия~~ ~~которой~~ ~~он~~ изображённую на рисунке линию, по которой ~~он~~ ~~идёт~~ ~~на~~ границы изображённой фигуры (рис. 1). Теперь рассмотрим кол-во ~~линий~~ "отрезков" каждого типа. Их ~~будет~~ по 9 шт. каждого типа. Теперь заметим, что каждый треугольник на рисунке, ограничивает набор из 3 отрезков, 3 разных типов. (рис. рис. 1)

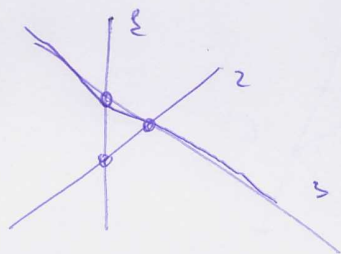


рис. 1

(треугольник ограничивает 3 отрезка -

1 - вертикальный, 2 - ~~на~~ наклон со часовой, 3 - против часовой)

и очевидно, что 1 и тот же набор из 3 отрезков разных типов не может ограничить 2 разных треугольника $\Rightarrow$ мы можем сопоставить каждому треугольнику - набор из 3 отрезков разных типов, таких, что разным треугольникам, соответствуют разные ~~наборы~~ наборы.

Но некоторые наборы, треугольники не образуют — это наборы, ~~которые~~ в которых 3 отрезка пересекаются в 1 точке. Таких наборов 61 (~~но~~ ~~то~~ ~~бы~~ это ~~все~~ выяснить, чтобы посчитать кол-во грав. на рисунке, в которых пересекаются 3 отрезка) Очевидно, что либо все отрезки в наборе пересекаются в 1 точке, либо набор образует треугольник.

II
Чтобы узнать кол-во треугольников на рисунке, надо подсчитать общее кол-во наборов и вычитать наборы, пересекающиеся в 1 точке.

Общее кол-во наборов = 9^3 (каждый из 9 вариантов 1 отрезок $\rightarrow 9$, в любом месте) $\Rightarrow$ кол-во треугольников равно $9^3 - 61 = 729 - 61 = 668$

Ответ: 668

502

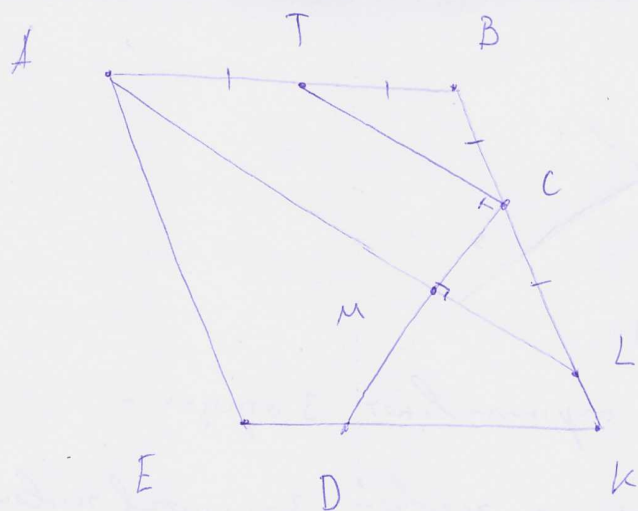


рис. 2

Продлим BC и DE до пересечения. $BC \cap DE = K$. Т.к. $ABCE$ — выпуклый, C и D лежат на ~~век~~ отрезках BK и EK соответственно. $\angle A = 60^\circ$. $\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E = 180^\circ \cdot 3 = 540^\circ$, $\angle B = \angle C = \angle D = \angle E \Rightarrow \angle B = \angle C = \angle D = \angle E = \frac{540^\circ - 60^\circ}{4} = 120^\circ \Rightarrow AB \parallel EK, AE \parallel BK \Rightarrow ABKE$ — параллелограмм.

$$\angle K = 60^\circ, \angle BCD = 120^\circ \Rightarrow \angle KCD = 60^\circ \Rightarrow DC = CK = DK = 4.$$

$$AE = BK = 7 \Rightarrow BC = 7 - 4 = 3. \quad AB = EK = 6 \Rightarrow ED = 6 - 4 = 2.$$

$$T - \text{середина } AB. \quad \angle TBC = 120^\circ \Rightarrow \text{т.ч. } TB = \frac{6}{2} = 3 \text{ и } BC = 3,$$

$$\angle BCT = 30^\circ. \quad \angle DCK = 60^\circ \Rightarrow \angle TCD = 180^\circ - 30^\circ - 60^\circ = 90^\circ,$$

Проведем через A прямую $\parallel TC$, перпендикулярно BK в точке L. ~~т.ч.~~

$$\ast AL \cap CD = M \Rightarrow \text{т.ч. } \angle TCD = 90^\circ, AL \perp CD.$$

$$\ast \frac{TC}{\sin 120^\circ} = \frac{BC}{\sin 30^\circ} \quad (\text{т.ч. } \angle B = 120^\circ, \angle BTC = 30^\circ) \text{ по теореме синусов.}$$

$$TC = x$$

$\Downarrow$

$$\frac{x}{\sin 120^\circ} = \frac{3}{\sin 30^\circ}$$

$$\sin 120^\circ = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\frac{x}{\sin 120^\circ} = \frac{2x}{\sqrt{3}} = \frac{3}{\sin 30^\circ} = 6$$

$$\frac{2x}{\sqrt{3}} = 6$$

$$x = \cancel{6} 3 \cdot \sqrt{3}$$

$$TC - \text{средняя линия } \triangle ABL \Rightarrow AL = 2TC = 6 \cdot \sqrt{3}$$

$$\frac{ML}{\sin 60^\circ} = \frac{CL}{\sin 90^\circ} \quad (\angle LML = 90^\circ, \angle MCL = 60^\circ)$$

$$ML = y$$

$\Downarrow$

$$\frac{2y}{\sqrt{3}} = 3 \quad (\text{т.ч. } AB = BL, BC = 3 \Rightarrow CL = 3)$$

$$y = \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{2}$$

$$AL = 6 \cdot \sqrt{3}, \quad ML = \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{2} \Rightarrow AM = 6 \cdot \sqrt{3} - \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{2} = \cancel{6} \sqrt{3} \left(6 - \frac{3}{2}\right) =$$

$$AM = \sqrt{3} \left(6 - \frac{3}{2} \right) = \sqrt{3} \cdot \frac{9}{2} = 4,5 \cdot \sqrt{3}$$

↓

$$\text{Клей: } AM = 4,5 \cdot \sqrt{3}$$

504

Сначала заметим, что если общее кол-во детей $= N$, то 1 ребёнок даёт 0, второй 1, третий 2 ... N -ый $= N-1$. (т.е. $N \geq$ количество детей, которое не может, может всего N , и все возможные различные кол-во детей).

Посчитаем общее кол-во подарков:

$$0 + 1 + 2 + 3 \dots (N-1) = \frac{N(N-1)}{2}$$

Каждый ребёнок получит поровну подарков, то $\frac{N(N-1)}{2}$ делится на N .

Но $(N, N-1) = 1 \Rightarrow$ если N - чётное, то $\frac{N(N-1)}{2} \div N \Rightarrow$

При $N \div 2$ так быть не может.

Докажем, что при $N \div 2$ такое невозможно.

Пусть всего у нас было $2k+1$ детей. Проверим всех детей числами от 0 до $2k$.

~~Пусть пусть ребёнок с номером i даёт i подарков.~~
Заметим, что тоже можно ред. детей получить от $(2k+1)2k$
~~поэтому с номером от~~ $\frac{(2k+1)2k}{2(2k+1)} = k$ подарков

Пусть ребёнок с номером i даёт i подарков, тогда от $i+1$ до $2i$ (номера берутся по модулю $2k+1$)

Рассмотрим снова ребёнка с номером $2k$.

Ему не даёт подарка ребёнок с номером $k-1$, но даёт подарков ребёнок с номером $k \Rightarrow$ даёт ему подарки, тогда с номером $k-2k-1$ (то есть k детей $\Rightarrow 2k$ подарков) всё верно. т.е. детей с номером больше $2k$ нет.

Теперь рассмотрим ребёнка с номером $2a$, где $2a \leq 2k$

Ему не даёт подарка ребёнок $a-1$, но даёт подарков ребёнок $a \Rightarrow$ ему даёт подарки люди от a до $2a-1$, этого есть a подарков.

Шифр М-005

Но ему также могут дать номер $2a$ с ~~номер~~ номером $2a$.

Мы знаем, что номер ~~$2a$ и $2k+2a+1$~~ ~~ограничен~~ x и $x+2k+2$ ограничен. Заметим, что $2a$ и $2k+2a+1$ ограничены.

Заметим, что человек с номером $k+a$ (~~$k+a$~~ ~~свернуто~~ $k+a < 2k$) не даёт номеру $2k+2a+1$ и $k+a+1$ даёт $\Rightarrow$ $2a$ даёт номеру ещё и номер от $k+a+1$ до $2k$, то есть ещё $k-a$ номеров $\Rightarrow$ всего ему номеров $a + (k-a) = k$ номеров, всё хорошо.

Рассмотрим человека с номером $2b+1 < 2k$

Ему не даёт номеру человек с номером b , но даёт номеру с номером $b+1 \Rightarrow$ ему даёт номеру номер с номером $b+1$ — $2b$, то есть уже b номеров, но ему даёт номеру ещё и номер с номером $2b+1$.

Номер $2b+1$ аналогичен номеру $2b+2k+2$. Таким образом не даёт номеру $b+k$ (~~свернуто~~ $b+k < 2k$, $b+k+1 < 2k$), но даёт номеру $b+k+1 \Rightarrow$ ему даёт номеру ~~ещё~~ номер от $b+k+1$ до $2k$, то есть ещё $k-b$ номеров $\Rightarrow$ всего он получит k номеров, всё хорошо.

Таким образом рассмотрим все возможные номера ($2k$, $2a$, $2a+2k$, $2b+1$, $2b+1 < 2k$; другие варианты не рассматриваем) и все возможные пары номеров $\Rightarrow$ при любом перемешивании все могут получить по k номеров.

т.т.ч.

Ответ: при N людей $2k+1$, где k — натуральное.

№

503

Стр 6 из 8

Заметим, что т.ч. в выражении берется

$\sqrt{x}$ и $\sqrt{1-x}$, то $0 \leq x \leq 1$

Если $y=0$, то $\sqrt{x} \cdot (-x^2)\sqrt{1-x}$ обычно ≤ 0 , т.ч.

$-x^2$ либо 0 либо < 0 .

Если $y > 1$ ~~$y + \sqrt{x} > 0$~~ и $x \neq 1$, то

$y + \sqrt{x} > 0$, $y - x^2 > 0$ (т.ч. $x \leq 1$) $\Rightarrow$

ли выражение > 0 это верно.

Если ~~$y < -1$~~ ~~$y < -1$~~ , то $y < 0$, то

$\sqrt{1-x} \geq 0$, $y - x^2 < 0 \Rightarrow y + \sqrt{x}$ должно быть ≥ 0

$$y + \sqrt{x} \geq 0$$

$$\sqrt{x} \geq -y$$

"

$$y \geq -\sqrt{x}$$

Изобразим на графике

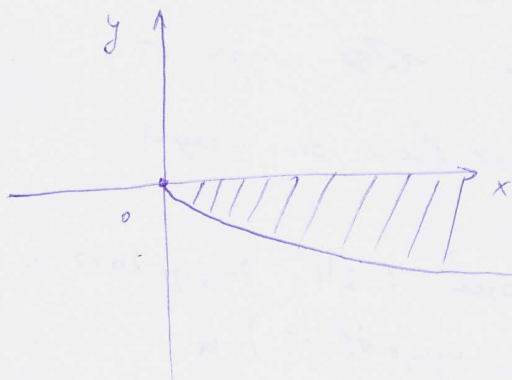


рис. 3

Если $1 \geq y > 0$, то

$$y + \sqrt{x} \geq 0$$

$$\sqrt{1-x} \geq 0$$

||

$y - x^2$ должно быть ≤ 0

$$y \leq x^2$$

Изобразим ~~это~~ график:



рис. 4

Изобразим на плоскости график функции $y = \sqrt{x}$ и

$$y = x^2, \text{ где } x \geq 0$$

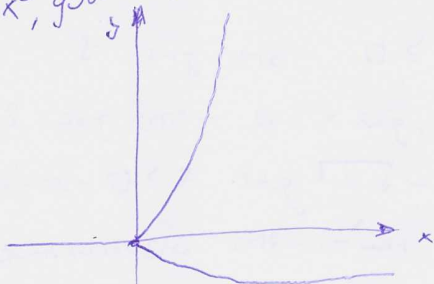


рис. 5

Заметим, что **II** график получается поворотом **I** на 90° против часовой стрелки.

Теперь составим **в.и.**, по ним получим:

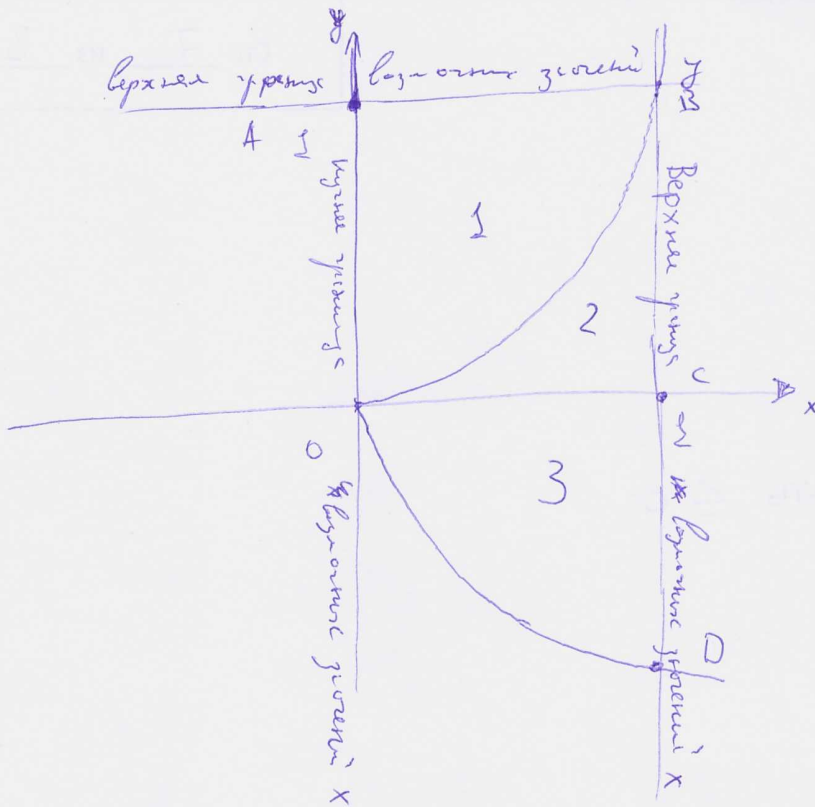


рис. 6.

Понимая, что $0 \leq x \leq 1$, $y \leq 1$.
 проведем прямые, которые соответствуют минимальному значению x ($x=0$), максимальному значению x ($x=1$), минимальному значению y ($y=0$), максимальному значению y ($y=1$) точки пересечения $y=1$ и $x=0$ назовем A , точку $y=1$ и $x=1$ назовем B , точку пересечения $x=1$ и оси x назовем C .
 Начало координат — точка O . Пусть зоны ограничиваются ~~линиями~~ ~~прямыми~~ OA , AB и кривой $y=x^2$, для $x \geq 0$ — это зона 1.
 Зона ограничиваемая OC , CB и кривой $y=x^2$, для $x \geq 0$ — это зона 2,
 зона ограничиваемая OC , OB и кривой $y=-\sqrt{x}$ для $x \geq 0$ — это зона 3.
 По рисунку, площадь которой нам надо найти — это объединение зон 2 и 3. По условию, что площадь зон 1 ~~и зон 2~~ и зона 3 равны, т.е. $OC = OA$, CD (D — точка пересечения $y=-\sqrt{x}$, для $x \geq 0$, BC) $\equiv$ AB (т.е. D — точка $x=1$, $y=-1$, кривая $y=-\sqrt{x}$, для $x \geq 0$ через неё проходит, и B точка $x=1$, $y=1$, кривая $y=x^2$, для $x \geq 0$ через неё проходит), кривые $y=-\sqrt{x}$ и $y=x^2$ для $x \geq 0$, пойдут для нас ввероятно на $90^\circ \Rightarrow S(\text{зона 1} + \text{зона 2}) = S(\text{зона 2} + \text{зона 3}) = 1 \cdot 1 = 1 \Rightarrow$ Ответ: площадь ~~этой~~ ~~того~~ ~~количество~~ ~~точек~~ $= 1$.