

Задача - 1

(1)

Ответ: ~~560~~ 668

Перечерчивать не вариант, а объяснить, как считал, достаточно сложно, но я попыталась.

Во - первых, фигура состоит из двух одинаковых решетчатых треугольников, так что достаточно посчитать кол-во треугольников в одном и умножить на два

Во - вторых, все точки в треугольнике расположены на параллельных прямых, что поможет при подсчете. Я буду называть все прямые параллельные ~~прямые~~ уровнями (какому именно не играет роли, т.к. фигура симметрична, и треугольник переходит в себя при повороте в 120°) уровнями.

Также же заметим, что все треугольники равнобедренные (равносторонние). Считаем следующим образом: начинаем с верхнего уровня и будем спускаться вниз до предпоследнего, на каждом уровне будем брать те вершины, которые могут образовать с нижними уровнями треугольники, и умножать их на кол-во уровней под ними (р.с. с которыми они могут образовать равнобедренные Δ -ки)

$$\begin{aligned} & (1+2+3+4) \cdot 9 + 5 \cdot 8 + 6 \cdot 7 + 7 \cdot 6 + 8 \cdot 5 + 9 \cdot 4 + 8 \cdot 3 + 7 \cdot 2 + 6 \cdot 1 = \\ & = 9(10+4) + 2(5 \cdot 8 + 6 \cdot 7) + 2(4 \cdot 3 + 7 \cdot 2) = 2(40 + 42 + 7 \cdot 9 + 12 + 10) = \\ & = 2(104 + 63) = 2 \cdot 167 = 334 - \text{кол-во } \Delta\text{-ов в одном боковом } \Delta\text{-ке} \end{aligned}$$

$$334 \cdot 2 = 668 - \text{всего - треугольников}$$

Задача - 2

Дано:

ΔBCE - равнобедренный
5-угольник

$$\angle A = 60^\circ$$

$$\angle B = \angle C = \angle D = \angle E$$

$$\angle B = 6^\circ, \angle E = 7^\circ,$$

$$CD = 4$$

Найти

$$\angle H = ?$$

Решение

$AH \perp CD$ (т.к. расстояние до CD по углам)

$$\Rightarrow \angle AHD = 90^\circ$$

$$\angle A = 60^\circ \text{ (по усл.)}$$

$$\angle B = \angle C = \angle D = \angle E =$$

$$= \frac{3 \cdot 180 - \angle A}{4} = \frac{540 - 60}{4} =$$

$$= \frac{480}{4} = 120^\circ$$

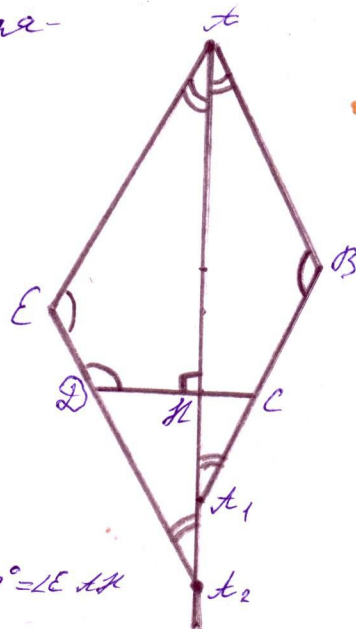
Рассмотрим ΔEAH

$$\angle E = \angle D = 120^\circ \quad \angle H = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \angle AHD + \angle EAH = 360^\circ - 2 \cdot 120^\circ - 90^\circ =$$

$$= 120^\circ - 90^\circ = 30^\circ$$

$$\Rightarrow \angle BAH = \angle A - \angle EAH = 60^\circ - 30^\circ = 30^\circ = \angle EAH$$



$$BC \cap AD = A_1, \quad E \in AD \cap AD = A_2$$

Рассмотрим $\triangle A_1BA_2$ и $\triangle A_1EA_2$

$$\angle E A_1 H = \angle B A_1 H = 30^\circ$$

$$\angle A_1 E D = \angle A_1 B C = 120^\circ$$

$$\Rightarrow \angle A_1 = 30^\circ; \angle A_2 = 30^\circ \text{ (по сумме углов)}$$

$\Rightarrow \triangle A_1BA_2$ и $\triangle A_1EA_2$ - равнобедренные (по двум углам)

$$\Rightarrow A A_1 = A B \cdot 2 \cos 30^\circ = 6 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3};$$

$$A A_2 = A E \cdot 2 \cos 120^\circ = 7 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 7\sqrt{3} \text{ (через высоту к основанию)}$$

$$\text{Пусть } A H = x$$

$$A_1 H = 6\sqrt{3} - x$$

$$A_2 H = 7\sqrt{3} - x$$

$\triangle A_1CH$ и $\triangle A_2DH$ - прямоугольные ($AH \perp CD$)

$$\Rightarrow DH = \frac{A_2H}{\tan 30^\circ} = \frac{7\sqrt{3}-x}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = (7\sqrt{3}-x)\sqrt{3}$$

$$CH = A_1H \cdot \tan 30^\circ = (6\sqrt{3}-x) \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}-x}{\sqrt{3}}$$

$$DC = DH + CH = \frac{7\sqrt{3}-x}{\sqrt{3}} + \frac{6\sqrt{3}-x}{\sqrt{3}} = \frac{13\sqrt{3}-2x}{\sqrt{3}}$$

$$DC = 4 \text{ (по зад.)}$$

$$\frac{13\sqrt{3}-2x}{\sqrt{3}} = 4$$

$$13\sqrt{3}-2x = 4\sqrt{3}$$

$$2x = 9\sqrt{3}$$

$$x = 4\sqrt{3} \quad AH = x = 4\sqrt{3}$$

$$\text{Ответ: } AH = 4\sqrt{3}$$

Задача 3

$$(y + \sqrt{x})(y - x^2)\sqrt{1-x} \leq 0$$

при $y > 0$

$$(y + \sqrt{x})\sqrt{1-x} \geq 0 \Rightarrow y \leq 0 \quad y - x^2 \leq 0$$

$$y \leq x^2$$

при $y = 0$

$$(y + \sqrt{x})\sqrt{1-x} \geq 0 \Rightarrow y - x^2 \leq 0$$

$\Rightarrow x^2 \geq 0$ - м.е. всегда

при $y < 0$

$$(y - x^2)\sqrt{1-x} \leq 0 \Rightarrow y + \sqrt{x} \geq 0$$

$$\boxed{0 \leq x \leq 1} \quad \text{т.к. } \sqrt{x} \geq 0, \sqrt{1-x} \geq 0$$

$y \geq -\sqrt{x}$

отметим все на координатной плоскости

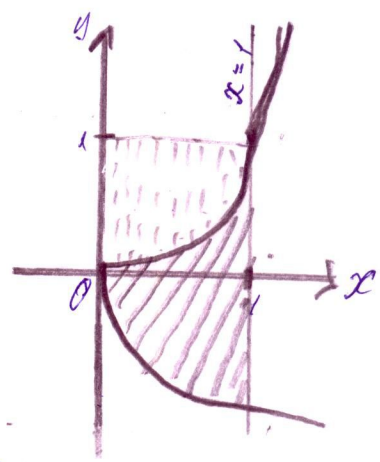
Заметим ~~$|y| \geq |x|$~~

1) $0 \leq x \leq 1 \quad |y| \leq 1$

2) $y > 0 \quad y \leq x^2$ - это кусочек под параболой в квадратике 1×1

3) $y \leq 0$ линия длиной 1

4) $y \geq -\sqrt{x}$ равносильно $x \geq y^2$ при $y < 0$, что тоже в свою очередь равно по площади $y \geq x^2$ при $y \leq 1 \quad x > 0 \quad x \leq 1$



У нас получится квадратик 1×1 с двойной линией параболы и без одной стороны, что взаимно компенсирует друг друга, в результате получается квадрат $S = 1$

Ответ: 1

Задача - 4

Каждый из детей мог подарить от 0 до $n-1$ подарков, что уже n разных количеств всего подарков $\frac{n(n-1)}{2}$, а каждый получит

$\frac{n(n-1)}{2n} = \frac{n-1}{2} \Rightarrow n-1 \div 2 \Rightarrow n - \text{нечётное}$

Ответ: при любой нечётной

Пример

Брату Братушкин каждого ребёнка числом равным числу подарков сделанных им. Все детей, кроме младшего, можно разбить на пары (их $\frac{n-1}{2}$), такие образы, чтобы количество подарков сделанных им было равно n ($1 \in n-1, 2 \in n-2, \dots, \frac{n-1}{2} \in \frac{n+1}{2}$), а в паре дети обмениваются подарками и вместе делают оставшиеся $(n-2)$ по одному подарку.

$\Rightarrow$ у каждого ребёнка будет по одному подарку от каждой пары, всего $\frac{n-1}{2}$

Задача - 5

$n^3 + 13n - 273 = (n+y)^3$, где y - целое и $y \geq -12$
 $n^3 + 13n - 273 = n^3 + 3yn^2 + 3y^2n + y^3$

$$13n - 3yn^2 - 3y^2n - y^3 - 273 = 0$$

$$13 - 3yn - 3y^2 - y^3 = \frac{273}{n}$$

$$3yn + 3y^2 + y^3 = 13 - \frac{273}{n}$$

$$y(3n + 3y + y^2) = 13 - \frac{273}{n}$$

т.к. мы работаем с целыми числами, то и $\frac{273}{n}$ - целое

$\Rightarrow$ нам надо подобрать все делители 273, ~~$273 \leq 13$~~

(273, 91, 39, 21, 13, 7, 3, 1)

$$1) y(519 + 3y + y^2) = 12$$

$$519 + 3y + y^2 \neq 12 \Rightarrow \text{не подходит}$$

$$y^2 \geq 3y \quad \text{при } |y| \geq 3$$

$$2) y(273 + 3y + y^2) = 13 - 3$$

$$y(273 + 3y + y^2) = 10$$

$$|y(273 + 3y + y^2)| \geq |273 + 3y + y^2| \neq 10 - \text{не подходит}$$

$$3) y(117 + 3y + y^2) = 6$$

$$|y(117 + 3y + y^2)| \geq 117 + 3y + y^2 > 6 - \text{не подходит}$$

$$4) y(3n + 3y + y^2) = 0 - \text{подходит при } y = 0$$

5)

не успел считать на черновике

Ответ: 21