№3

Определим промежуток для x из выражений $\sqrt{1-x}$ и $\sqrt{x}$:

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{1-x} \to 1-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 1 \\ \sqrt{x} \to x \geq 0\end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow x \in [0;1]$. При $x=1$ $\sqrt{1-x}=0 \Rightarrow$ все выр-ние $=0$

$\Rightarrow y$ принимает любые значения ($y \in (-\infty;+\infty)$).

Значит, определим значения y для $x \in [0;1)$:

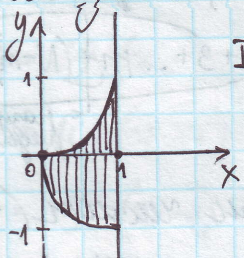
либо $y+\sqrt{x} \leq 0$, либо $y-x^2 \leq 0$.

Если $y+\sqrt{x} \leq 0$, то $y \leq -\sqrt{x} \Rightarrow y \in (-1;0]$ ①

Если $y-x^2 \leq 0$, то $y \leq x^2 \Rightarrow y \in [0;1)$. ②

Множества ① и ② пересекаются только в $y=0$, но в этом случае оба множителя $=0$. В других случаях смены знака нет. Построим график:

I.

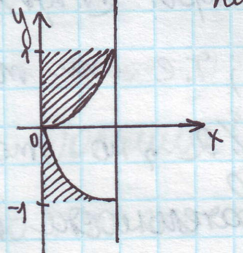


I. Если $\underbrace{y \leq x^2}_{\text{(т.е. } y-x^2<0)}$, то $y+\sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow y > -\sqrt{x}$

II. Если $y+\sqrt{x} \leq 0$, то $y-x^2 \geq 0 \Rightarrow y > x^2$

И в случае I и в случае II площадь множества точек равна 1 ед.^{2}

II.



Ответ: 1

№ 4

max. кол-во подарков от ребенка $= N-1$, значит, один человек точно не дарит ни одного подарка. Кол-во всех подарков $S = 0+1+2+3+\ldots+(N-2)+(N-1) =$ $= 2+3+\ldots+(N-2)+N$. При этом $\frac{S}{N} \in Z$ (и натуральным числам). Допустим, что $N \vdots 2$, тогда $(2+3+\ldots+(N-2)+N) \vdots 2$, но ~~$(N-2) \vdots 2$, а $3 \not\vdots 2 \Rightarrow$ для восстановления чётности нужно еще одно нечётное число, однако~~ сгруппируем числа $\underbrace{0+N}+\underbrace{2+(N-2)}+\underbrace{3+(N-3)}+\ldots+m+(N-m)$. Рассмотрим пару $m+(N-m)$, ~~где N чётно~~ : т.к. N − четно, то общее кол-во групп (пар чисел) − тоже чётно, ~~т.к. N~~ однако получается, что при условном разделении ряда пополам (т.е. $2+3+\ldots m+(N-m)+(N-3)+(N-2)$) ← разделение ряда пополам

m и $(N-m)$ быть двумя ~~одним~~ числами, ~~т.к.~~ с одной четностью либо одним числом (что невозможно по условию $N \vdots 2$), т.к. пары $(N-2)+2$, $3+(N-3)$ имеют одну четность (при $N \vdots 2$), т.е. если $m \vdots 2$, то и $(N-m) \vdots 2$ или $m \not\vdots 2$ и $(N-m) \not\vdots 2$, но это невозможно, т.к. они стоят в последовательности натуральных чисел Y. Исходя из предыдущих высказываний, можно утверждать, что при $N \vdots 2$ таких чисел, удовлетворяющих условиям задачи, нет, а при $N \not\vdots 2$ (т.е. нечетных N) все условия будут соблюдены. Примеры: 3 и 5 детей

- $3 \rightarrow S = 0+1+2 = 3$, $3 \vdots 3 = 1$
- $5 \rightarrow S = 0+2+3+5 = 10$, $10 \vdots 5$, $\frac{10}{5} = 2$

Ответ: при N – нечетных ($N \not\vdots 2$)

№ 1

Обозначим за 1 – сторону маленького $\triangle$.

$\triangle 1$ – треугольник со стороной 1, $\triangle 2$ – со стороной 2 и т.д. до $\triangle 12$.

$\triangle 1 = 120$	$\triangle 5 = 72$ $(36 \cdot 2)$	$\triangle 9 = 20$ $(10 \cdot 2)$
$\triangle 2 = 114$ $(66 \cdot 2 - 36)$	$\triangle 6 = 56$ $(28 \cdot 2)$	$\triangle 10 = 12$ $(6 \cdot 2)$
$\triangle 3 = 104$ $(55 \cdot 2 - 6)$	$\triangle 7 = 42$ $(21 \cdot 2)$	$\triangle 11 = 6$ $(3 \cdot 2)$
$\triangle 4 = 90$ $(45 \cdot 2)$	$\triangle 8 = 30$ $(15 \cdot 2)$	$\triangle 12 = 2$ $(1 \cdot 2)$

от $\triangle 4$ до $\triangle 12$ получаются „треугольные" числа (~~числа Фибоначчи~~), умноженные на 2 (т.к. 2 треугольника больших), а ~~$\triangle 1$ по $\triangle$~~ $\triangle 2$ и $\triangle 3$ считались по тем же треугольным числам, но

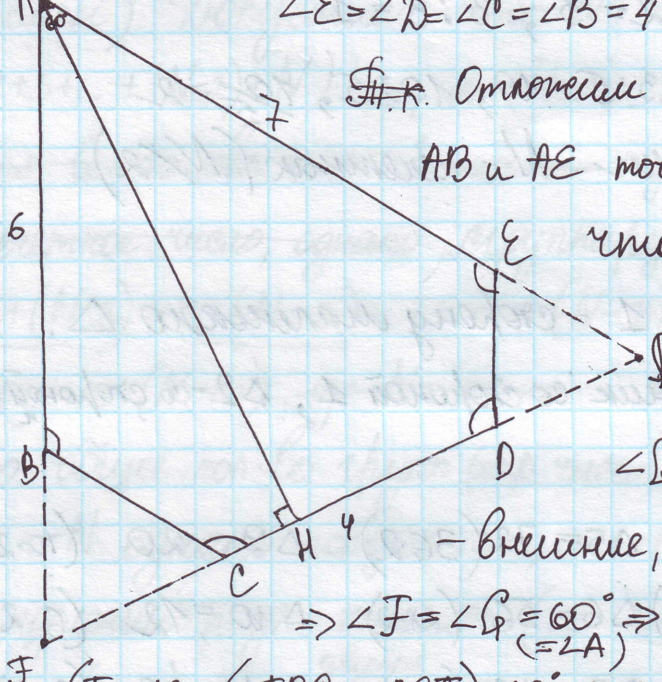
вычиталось число тех треугольников, которых нет на рисунке. Кол-во $\triangle 1 = 24 \cdot 4 + 4 \cdot \overset{\text{„число лучей звезды"}}{6} = 120$.
(число $\triangle 2$ в пересечении)

Всего треугольников $372 + 120 + 114 + 104 = 710$
(Σ треугольных чисел $\times 2$)

Ответ: 710 треугольников

№2 Дано: $ABCDE$ – выпукл. 5уг., $\angle A = 60°$, $\angle B = \angle C = \angle D = \angle E$, $AB = 6$, $AE = 7$, $CD = 4$

$$\angle E = \angle D = \angle C = \angle B = \frac{180 \cdot 3 - 60}{4} = 120°$$



~~Т.к.~~ Отложим на продолжениях AB и AE точки F и G так, чтобы они лежали на продолжении CD. Т.к. $\angle GED$, $\angle BCF$, $\angle GDE$, $\angle CBF$ – внешние, то они $= 180 - 120 = 60°$ $\Rightarrow \angle F = \angle G = 60°$ $(=\angle A)$ $\Rightarrow \triangle AFG$ – равностор.
($\angle F = 180 - (\angle FBC + \angle BCF) = 60°$, аналогично с $\angle G$).

Выразим FG через остальные отрезки ($\triangle FBC \sim \triangle GDE \sim \triangle AFG$ т.к. они все р/с):

$FG = (AF - AB) + (AG - AE) + CD = AF - 6 + AG - 7 + 4 =$
$= AF + AG - 9 \Rightarrow FG - AG = AF - 9$, где $FG = AG = AF$
$\Rightarrow FG - AG = 0 \Rightarrow AF = 9 \Rightarrow AG = FG = AF = 9$

№2 (продолжение)

Проведем AH – расстояние от A до CD $\Rightarrow$ $AH \perp CD$ $\Rightarrow$ AH – медиана (по св-ву р/с $\Delta^{\text{ка}}$) $\Rightarrow FH = GH = \frac{1}{2} \cdot 9 = 4{,}5$. Рассмотрим ΔFHA: ($\angle FHA = 90°$)

По т. Пифагора:

$AF^2 = AH^2 + FH^2 \Rightarrow AH = \sqrt{AF^2 - FH^2} = \sqrt{60{,}75} =$

$= 3\sqrt{6{,}75} = 3\sqrt{9 \cdot 0{,}25 \cdot 3} = 9 \cdot 0{,}5\sqrt{3} = 4{,}5\sqrt{3}$

Ответ: $4{,}5\sqrt{3}$ – расстояние.

№5.

$273 = 13 \cdot 7 \cdot 3$.

Обозначим за k – натуральное число, кубом k-рого является $n^3 + 13n - 273$

$k^3 = n^3 + 13n - 273$

$\cancel{(k-n)(k^2+kn+n^2) = 13(n-21)}$

$\cancel{(n-k)(k^2+kn+n^2) = 13(n-21)}$

$n^3 + 13n = k^3 + 273$

$n^3 + 13n = k^3 + 21 \cdot 13$ – получается, что $n = 21 \Rightarrow$ $k = 21$. Других натуральных чисел нет

Ответ: 21