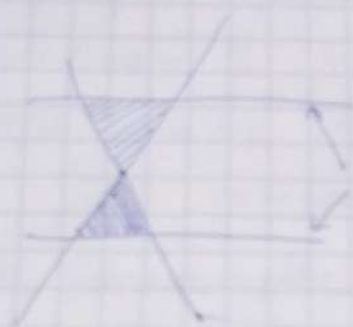


и 1. Замечим, что рисунок составлен из 3 групп отрезков, лежащих на параллельных прямых.

Такие прямые могут образовывать только 2 типа треугольников подобиям треугольнику своего "типа".



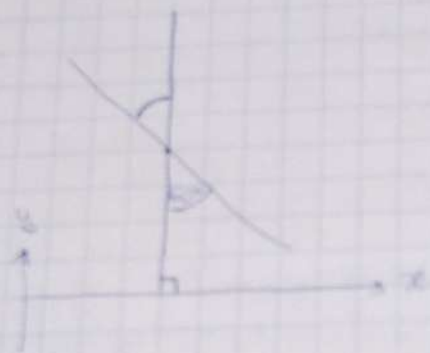
при пересечении с разных сторон от точки пересечения прямая отсекает треугольник одного из 2 типов.

Из симметрии картинки относительно прямых параллельных отрезкам рисунка треугольников каждого типа одинаковое кол-во, т.к. при повороте (отражении) каждый треугольник меняет тип, т.к. прямые отсекающие треугольник от угла окажутся с другой стороны от вершин углов.

~~Рассмотрим треугольник и одну из его вершин~~



Рассмотрим каждую вершину угла
образованную таким пересечением прямых

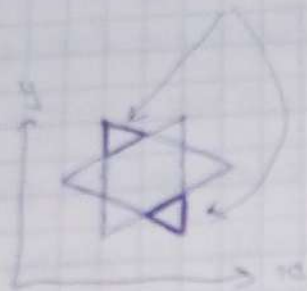


кол-во треугольников с вершиной в
этом пересечении равно кол-ву
отрезков от этого угла до вершин
и мы можем посчитать кол-во
отрезков в каждом углу треугольника
При этом каждый отрезок состоит
только из двух отрезков параллельных
таким прямым пересечения которых мы
имеем, значит имеет только одну вершину

такого типа, за ними образуем
ли подсчитали кол-во треугольников
В большом n угольнике на рисунке
образованном пересечением n больших
треугольников ~~61~~ вершина такого
типа (можно рисками подсчитать).
И каждую ^{нижнюю} вершину ^{верхнюю} не в вершине
пересекает 8 прямых (кусков прямых)
не параллельных одной из прямых образующих
угол. За каждую вершину является вершиной
в n уникальных треугольников (не
трудно убедиться, что каждый пересекающий
угол отрезок пересекает не параллельную
одной из прямых образующих угол
пересекает угол на обеих прямых и
причем на отрезках рисунка не konnten
восстановлены прямые образующие угол.

За мы уже насчитали $8 \cdot 61 = 488$ шт.
Есть еще вершины такого типа в
двух еще маленьких внешних

Вспомогательно 2-угольника треугольника



В таких треугольниках по 10 вершин
каждую из которых пересекает



все 3 отрезков и снова
все отрезки образуют

треугольники и снова уникальны.

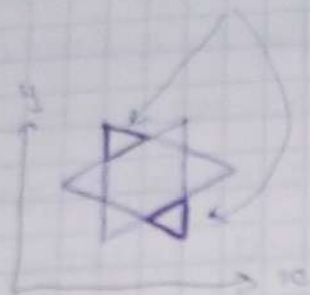
Эти новые вершины добавляют еще

$2 \cdot 10 \cdot 3 = 180$ треугольников.

Эти Мы посчитали все вершины
такого типа, а эти и все треугольники

Этот ответ: $180 + 488 = 668$

относительно α -угольника треугольника



В таких треугольниках по 10 вершин
каждую из которых пересекает
все 3 отрезков и снова
все отрезки образуют
треугольники и снова уникальные.



За такие вершины добавляются еще
 $2 \cdot 10 \cdot 3 = 180$ треугольников.

За Мы посчитали все вершины
такого типа, а за и все треуголь

За Ответ: $180 + 488 = 668$

Задача 3

$$\sqrt{x} \rightarrow x \geq 0$$

$$\sqrt{1-x} \rightarrow x \leq 1$$

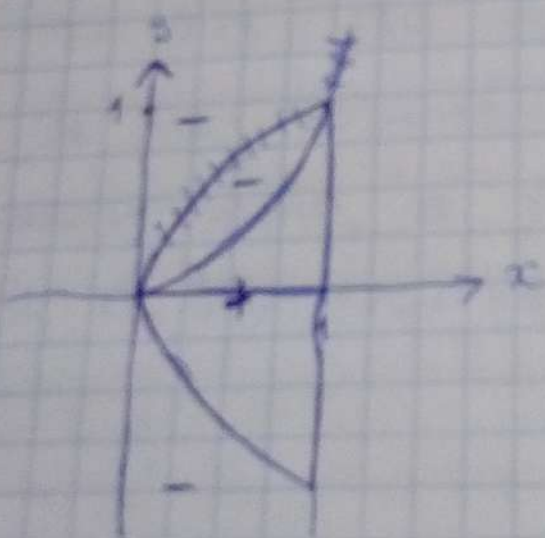
З. вся фигура лежит в полосе
от $x=0$ до $x=1$.

Множество точек в котором выражение
может менять знак из непрерывности
функций

$$\sqrt{1-x} = 0, \text{ но } \sqrt{x} \geq 0, \text{ поэтому не меняет}$$

$$y + \sqrt{x} = 0 \Rightarrow x = y^2 \text{ и } y \leq 0$$

$$\text{и } y - x^2 = 0 \Rightarrow y^2 = x^2$$



Чтобы узнать знаки выражения в
областях подставили значения в нерав

Когда $\sqrt{x}$

$$\sqrt{x} \rightarrow x \geq 0$$

$$\sqrt{1-x} \rightarrow x \leq 1$$

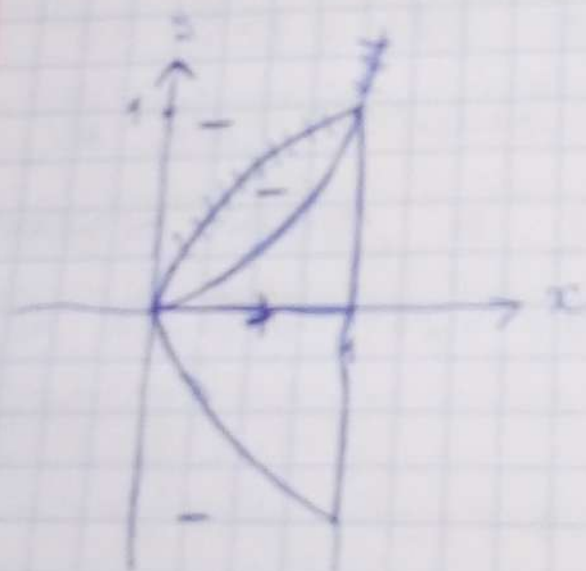
И вся фигура лежит в полоске
от $x=0$ до $x=1$.

Множество точек в котором выражение
может менять знак из непрерывности
функции

$$\sqrt{1-x} = 0, \text{ но } \sqrt{x} \geq 0, \text{ поэтому не } x=1$$

$$y = \sqrt{x} \geq 0 \Rightarrow x = y^2 \text{ и } y \leq 0$$

$$\text{и } y - x^2 = 0 \Rightarrow y^* = x^2$$



Чтобы узнать знаки выражения в
блестках подставляем значения в нера

и на графике обозначим + области удовлетворяющие, а - неуд. неравенству.

$(0; 1)$

$$(1+0) \cdot (1-0^2) \sqrt{1-\frac{1}{2}} \neq 0 \text{ не подходит}$$

$(0,5; 0,5)$

$$(0,5 + \underbrace{0}) \cdot (0,5 - \underbrace{0}) \sqrt{1 - \underbrace{0}} \neq 0 \text{ не подходит}$$

$(\frac{1}{2}; 0)$

$$(0 + \underbrace{\frac{1}{2}}) \cdot (0 - \underbrace{\frac{1}{2}}) \sqrt{1 - \underbrace{\frac{1}{2}}} \leq 0 \text{ подходит}$$

$(0; -1)$

$$(-1) \cdot (-1) \sqrt{1-\frac{1}{2}} \neq 0$$

Рассмотрим отдельно область лежащую под осью OX и над.

Над осью подходит область между OX $x=2$ и единичной параболой $y=x^2$

Под осью подходит область между

и на графике обозначим + области удовлетворяющие, а - неуд. неравенству.

$(0; 1)$

$$(1+0) \cdot (1-0^2) \sqrt{1} \neq 0 \text{ не подходит}$$

$(0,5; 0,5)$

$$(0,5 + \underbrace{\sqrt{0,5}}_0) (0,5 - \underbrace{(0,5)^2}_0) \sqrt{1 - \underbrace{x}_0} \neq 0 \text{ не подходит}$$

$(\frac{1}{2}; 0)$

$$(0 + \underbrace{\sqrt{\frac{1}{4}}}_0) (0 - \underbrace{\frac{1}{4}}_0) \sqrt{1 - \underbrace{\frac{1}{2}}_0} \leq 0 \text{ подходит}$$

$(0; -1)$

$$(-1) - (-1) \sqrt{1} \neq 0$$

Рассмотрим отдельно область лежащую под осью ox и над.

Над осью подходит область между ox $x=1$ и единичной параболой $y=x^2$

Под осью подходит область между y

ос. $z=1$ и заданной параболы
обратной на 30° . Заметим, что
при повороте в обратную сторону эта
длина является с областью над ос.
в обратных (на 1) так как параболы
обратной в область будет ограничена
ос. обратной на 30° , но есть $0y$, $x=1$
на 30° против час стрелки, но есть $z=1$
в точке $x=1$ и $0x$.

В процессе исходной фигуры 1, так
как при повороте площади мы не
создаем.

ос, $x=1$ и изогнутой находится
поворотной на 90° . Заметим, что
при повороте в обратную сторону эта
область совмещается с областью над ос
в квадратах 1 на 1 так как параболы
совпадают и область будет ограничена
ос поворотной на 90° , то есть oy , $x=1$
на 90° против час стрелки, то есть $z=$
в точке $x=1$ и ox .

Из построения исходной фигуры 1, так
как при повороте исходной мы не
идем.

$N-1$ Максимальное кол-во подарков
 от одного человека $N-1$, а минимальное
 0, но есть N вариантов и т.к.
 кол-во подарков разное по принципу
 Дирихле (если я не ошибаюсь в
 формулировке), ну или просто из здравого
 смысла ~~они~~ дети распекусят
 между собой без остатка все эти
 кол-ва ^{подарков} подарков.

Зн. всего подарков будет $(N-1) + (N-2) + \dots + 0$

$$= \frac{N \cdot (N-1)}{2} = \frac{N(N-1)}{2}$$
 по формуле арифметич.

Так как все получили поровну каждый
 получил $\frac{N-1}{2} \in \mathbb{Z}$ из целочисленности

подарков, зн $N-1 \div 2$, зн N - нечетное.

Для нечетного можно разбить детей
 на пары один из которых дарит $N-1$
 а второй k . При k от 0 до $\frac{N-1}{2}$ все
 В сумме они дарят N подарков, кото

$N-1$ Максимальное кол-во подарков
 от одного человека $N-1$, а минимальное
 0, но есть N вариантов и т.к.
 кол-ва подарков разное по принципу
 Дирихле (если я не ошибаюсь в
 формулировке), ну или просто из здравого
 смысла ~~если~~ дети расприделяют
 между собой без остатка все эти
 кол-ва ^{подарков} подарков.

Зн всего подарков будет $(N-1) + (N-2) + \dots + 0$

$$= \frac{N \cdot (N-1+0)}{2} = \frac{N(N-1)}{2}$$
 по формуле арифметической прогрессии

Так как все получили поровну каждый
 получил $\frac{N-1}{2} \in \mathbb{Z}$ из целочисленности

подарков, зн $N-1 \div 2$, зн N - нечетное.

Для нечетного N можно разбить детей
 на пары одни из которых дарит $N-1$
 а второй k При k от 1 до $\frac{N-1}{2}$ все
 В сумме они дарят N подарков, кото

Они всегда могут подарить по одному
другу другу и по одному от одного
из них детям не входящим в парю.
Из которых парю каждый должен получить по 1 подарку
В парю мы раздали всех, кроме
человека, который дарит о подарков, и
все подарки подарены и все условия
соблюдены. Зн.

Ответ: При таких и только таких
при которых $10 \frac{1}{2}$, то есть при $10 \frac{1}{2}$

Они всегда могут подарить по одному
друг другу и по одному от одного
из них детям не входящим в пары.
В пары мы разделим всех, кроме
человека, который дарит о подарков, и
все подарки подарены и все условия
соблюдены. Зн.

Ответ: При таких и только таких
при которых $N \geq 2$, то есть при $N \geq 2$.

В решение приложен рисунок на
отдельном листе!

12

Продлим BC и ED до пересечения
 $\angle ODC = 180^\circ - \angle EDC$ как смежный угол.

Сумма дуг $\angle$ утолщена 640° , зн

$$\angle EDC = \angle DCB = \frac{640^\circ - 60^\circ}{4} = 120^\circ$$

Зн $\angle ODC = \angle OCB = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$ Зн

$\triangle OCD$ равнобедренный и равносторонний.

И тогда $\angle EOB = 60^\circ = \angle BAE$, а $\angle ABD =$
 $= \angle AED$, зн $BA \parallel OE$ и $AE \parallel BO$, а зн

$ABOE$ параллелограмм по определению.

Зн по свойству параллелограмма $AB =$

$$ED = EO - OD = AB - OD = AB - CD = 2$$

$$\text{аналогично } BC = AE - CD = 3$$

Нечетко не трудно найти по теореме
косинуса

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cos \angle ABC \cdot AB \cdot BC =$$
$$= 36 + 9 - 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 3 \cdot 6 = 63$$

$$AD^2 = AE^2 + ED^2 - 2 \cos \angle AED \cdot AE \cdot ED =$$

1. решение поставлен рисунок на
таблице ниже!

Проведем BC и ED до пересечения
в O . $\angle ODC = 90^\circ - \angle EDC$ как смежный угол.
Также угол $\angle OCB$ равен 60° , так

$$\angle EDC = \angle OCB = \frac{60^\circ - 60^\circ}{2} = 120^\circ$$

Так $\angle ODC = \angle OCB = 90^\circ - 120^\circ = 60^\circ$ Так
 $\triangle ODC$ равнобедренный и равнобедренный

Которо $\angle EOB = 60^\circ = \angle BAE$, а $\angle ABO =$
 $= \angle AED$ Так $BA \parallel OE$ и $AE \parallel BO$, а так
 $ABOE$ параллелограмм по определению

Так по свойству параллелограмма $AE =$

$$EO = EO - OD = AB - OD = AB - CD = 2$$

$$\text{аналогично } BC = AE - OD = 3$$

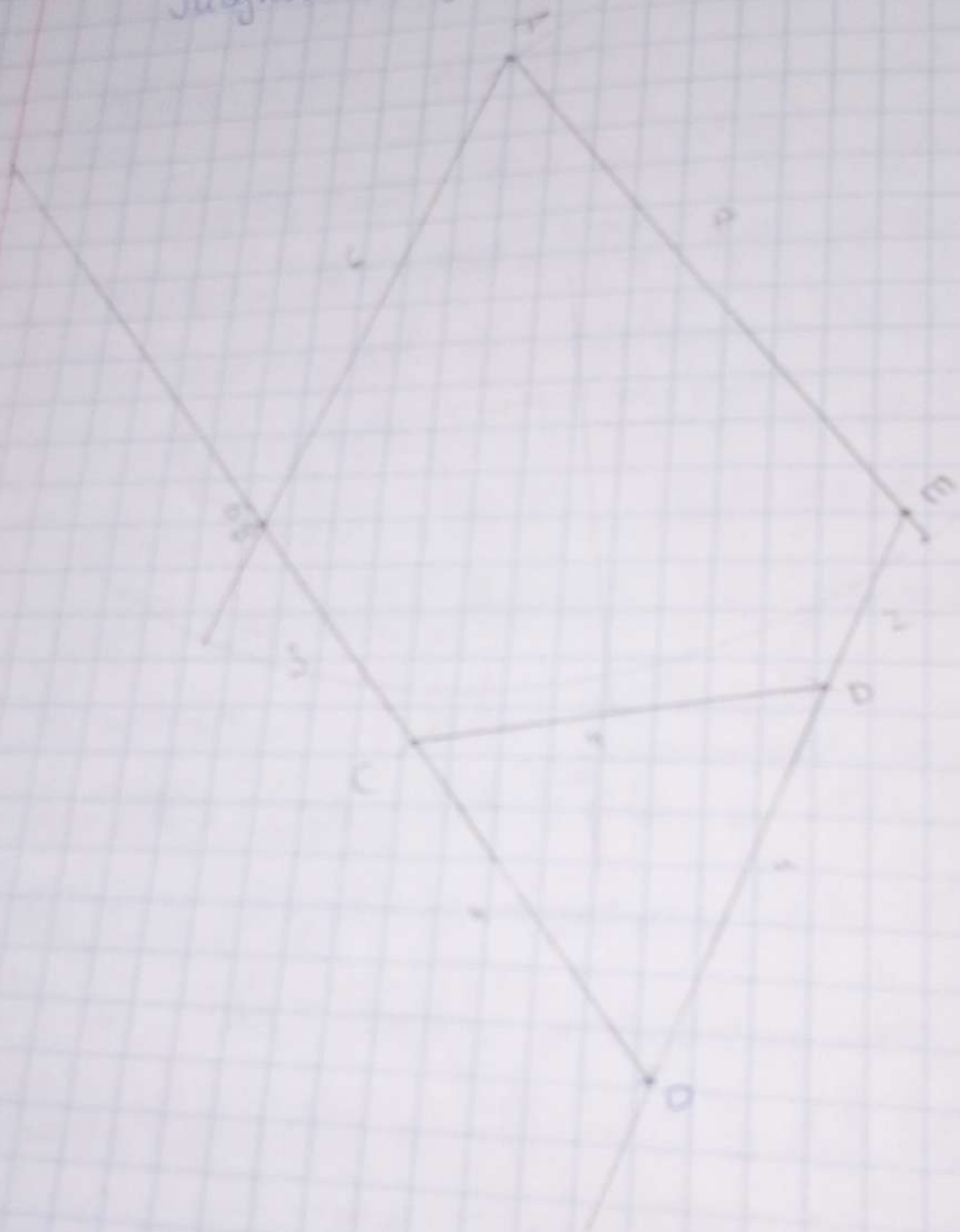
Теперь найдем длину стороны
диагонали

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \cos \angle ABC \cdot AB \cdot BC =$$

$$4^2 + 3^2 - 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 3 \cdot 4 = 63$$

$$AD^2 = AE^2 + ED^2 - 2 \cos \angle AED \cdot AE \cdot ED =$$

Рисунок к задаче 2



$$= 29 + 4 + 14 = 62$$

По теореме косинусов

$$AD^2 = CA^2 + CD^2 - 2 \cos \angle ACD \cdot CA \cdot CD = \frac{CA^2 \cdot CD^2 - 16}{2 \cdot CD \cdot CA}$$

По теореме синусов $\sin \angle ACD = \sqrt{1 - \cos^2 \angle ACD}$

$$= \sqrt{1 - \frac{4CD^2 \cdot CA^2 - (CA^2 \cdot CD^2 - 16)^2}{4CD^2 \cdot CA^2}}$$

По теореме Пифагора от 4 до CD =

$$= AC \cdot \sin \angle ACD = AC \cdot \sqrt{\frac{4CD^2 \cdot CA^2 - (CA^2 \cdot CD^2 - 16)^2}{4CD^2 \cdot CA^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{4 \cdot 16 \cdot 63 - (63 - 16 - 42)^2}}{2 \cdot 4} = \frac{\sqrt{64 \cdot 63 - 42^2}}{8}$$

$$= \frac{\sqrt{4 \cdot 63 - 9}}{2} = \frac{\sqrt{243}}{2} = \frac{3\sqrt{27}}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{2}$$

$$= 49 + 4 + 14 = 67$$

Но тогда по теореме косинусов

$$AD^2 = CA^2 + CD^2 - 2 \cos \angle ACD \cdot CA \cdot CD \Rightarrow \cos \angle ACD = \frac{CA^2 + CD^2 - AD^2}{2 \cdot CD \cdot CA}$$

Но тогда $\sin \angle ACD = \sqrt{1 - \cos^2 \angle ACD} =$
по теореме ПТ

$$= \sqrt{1 - \frac{(CA^2 + CD^2 - AD^2)^2}{4 \cdot CD^2 \cdot CA^2}}$$

Но тогда расстояние от A до CD =

$$= AC \cdot \sin \angle ACD = AC \cdot \sqrt{1 - \frac{(CA^2 + CD^2 - AD^2)^2}{4 \cdot CD^2 \cdot CA^2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{4 \cdot 16 \cdot 63 - (63 + 16 - 49)^2}}{2 \cdot 4} = \frac{\sqrt{64 \cdot 63 - 42^2}}{8}$$

$$= \frac{\sqrt{4 \cdot 63 - 9}}{2} = \frac{\sqrt{243}}{2} = \frac{3\sqrt{27}}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{2}$$

УС

$$K^3 = n^3 + 13n - 273$$

Пусть

$$n^3 + 13n - 273 > n^3, \text{ то есть}$$

$$n > 21, \quad K > n$$

(При $n = 21$, когда $n^3 + 13n - 273 = n^3$,
 зн. 21 кубованное.)

$$\text{Если есть } K^3 = n^3 + 13n - 273$$

K хотя бы на 1 больше n , ~~то~~ так
 как K тоже натуральное.

$$\text{По уравнение } (n+1)^3 = n^3 + 13n - 273 \Leftrightarrow$$

$$3n^2 + 3n + 1 = 13n - 273 \text{ не имеет решений}$$

$$\text{в действительных числах } \Delta = 10 - 4 \cdot 3 \cdot 274 < 0$$

А если K еще $3n$ ~~то~~ ~~тогда~~

$$\text{при } n > 71 \text{ ~~тогда~~ } (n+1)^3 > n^3 + 13n - 273$$

K натуральное по условию, зн

$$n^3 + 13n - 273 \text{ хотя бы } 1, 34$$

$$\text{при } n = 5 \quad n^3 + 13n - 273 = 125 - 273 = -148$$

$$\text{при } n = 6 \quad n^3 + 13n - 273 = 21$$

Зн. n из возрастания $n^3 + 13n - 273$ при $n >$

$$\text{Чтобы } n^3 + 13n - 273 > 0 \quad n \geq 6$$

У5

$$k^3 = n^3 + 13n - 273$$

Пусть $n^3 + 13n - 273 > n^3$, то есть
 $n > 21$, $k > n$

(При $n = 21$, когда $n^3 + 13n - 273 = n^3$,
 это кубовое.)

$$\text{Если есть } k^3 = n^3 + 13n - 273$$

k хотя бы на 1 больше n , ~~то~~ так
 как k — натуральное.

$$\text{Но уравнение } (n+1)^3 = n^3 + 13n - 273 \Leftrightarrow$$

$$3n^2 + 3n + 1 - 13n + 273 = 0 \text{ не имеет решений}$$

$$\text{в действительных числах } D = 10 - 4 \cdot 3 \cdot 274 < 0$$

~~и так как k — куб, то k^3 — куб~~

$$\text{при } n > 21 \text{ ~~имеем~~ } (n+1)^3 > n^3 + 13n - 273$$

k натуральное по условию, n

$$n^3 + 13n - 273 \text{ хотя бы 1, n }$$

$$\text{при } n = 5 \quad n^3 + 13n - 273 = 125 - 273 = -148$$

$$\text{при } n = 6 \quad n^3 + 13n - 273 = 21$$

Зн. из возрастания $n^3 + 13n - 273$ при $n >$

$$\text{Чтобы } n^3 + 13n - 273 > 0 \quad n \geq 6$$

$$n=7 \quad n(n^2+12) - 273 = 434 - 273 = 161 \text{ не куб}$$

Если $k < n$ найдем

$$k = n - b$$

$$(n-b)^3 = n^3 + 12n - 273$$

$$n^3 - 3n^2 + 3n + 12n - 273 = 0$$

$$-n^2b + n(b^2-12) + (273-b^3) = 0$$

$$2 = (b^2-12) + b(273-b^2)$$

$$n=8 \quad 8(64+12) - 273 = 616 - 273 = 343 = 7^3$$

$$n=9 \quad 9(81+12) - 273 = 846 - 273 = 573 \text{ не куб}$$

$$n=10 \quad 10(100+12) - 273 = 957 \text{ не куб}$$

$$n=11 \quad 11(121+12) - 273 = 1352 - 273 = 1079 \text{ не куб}$$

$$n=11 \quad 11(121+12) - 273 = 1352 - 273 = 1079 \text{ не куб}$$

$$(n-1)^3$$

кубы между $(n-1)^3$ и n^3 не растет к дисперсии n^3 за пересечение будет только одно в 21, а

$$(n-1)^3 = n^3 + 12n - 273$$

$$-n^2 + 12n + 273 = 0$$

$$n = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 273}}{-1} = -6 \pm \sqrt{309} = -6 \pm 2\sqrt{77} \text{ не}$$

натуральное, значит в натуральных n

$(n-1)^3$ не пересекается с k и после

$$n=2$$

$$n(n^2+13) - 273 = 434 - 273 = 161 \text{ не куб}$$

Если $k < n$ например

$$k = n - b$$

$$(n-b)^3 = n^3 + 13n - 273$$

$$X = 3n^2 + 3n + 13n$$

$$-n^2b + n(b^2 - 13) + (273 - b^3) = 0$$

$$b = (b^2 - 13)^2 + b(273 - b^3)$$

$$n=3$$

$$3(64+13) - 273 = 646 - 273 = 373 \neq \text{куб}$$

$$n=4$$

$$4(84) - 273 = 846 - 273 = 573 \text{ не куб}$$

$$n=10$$

$$10 \cdot 1430 - 273 = 957 \text{ не куб}$$

$$n=11$$

$$n=11$$

$$11(134) - 273 = 1471 \text{ не куб}$$

$$(n-1)^3$$

Кубы между $(n-1)^3$ и n^3 растут быстрее, но за пересечение тут только одно в 21,0

$$(n-1)^3 = n^3 + 13n - 273$$

$$-n^2 + 12n + 272 = 0$$

$$n = \frac{6 \pm \sqrt{36 + 272}}{-1} = -6 \pm \sqrt{308} = -6 \pm 2\sqrt{77} \text{ не}$$

натуральное, значит в натуральных $(n-1)^3$ не пересекается с k и после

$$12 \geq 2\sqrt{81} - 6 > 2\sqrt{21} - 6$$

Значит 11 больше всего

Значит подходит только 9 и 21

Ответ: 29

$$12 \geq 2\sqrt{81} - 6 \Rightarrow 2\sqrt{n} - 6$$

зн после 11 кбильно всегда

Зн кубовити только 9 и 2

Ответ: 29