① Voi nota latura unui triunghi unitate cu l.
Mai întâi voi calcula numărul de triunghiuri de
latură l.

În figură există 120 de triunghiuri de latură l
Acum voi calcula numărul de triunghiuri de
latură 2l. Acestea sunt în număr de 114
Triunghiurile cu latura 3l sunt în număr de 104
Triunghiurile cu latura 4l sunt în număr de 90
Triunghiurile cu latura 5l sunt în număr de 72
Triunghiurile cu latura 6l sunt în număr de 56
Triunghiurile cu latura 7l sunt în număr de 42
Triunghiurile cu latura 8l sunt în număr de 30
Triunghiurile cu latura 9l sunt în număr de 20
Triunghiurile cu latura 10l sunt în număr de 12
Triunghiurile cu latura 11l sunt în număr de 6
Cele mai mari triunghiuri din figură, cele cu
latura 12l sunt în număr de 2
În total, în figură sunt 668 de triunghiuri

① Singurele pătrate perfecte de două cifre sunt 16, 25, 36, 49, 64 și 81.

Notez cu n numărul de 6 cifre.

n – pătrat perfect

Fie $k \in \mathbb{N}$ astfel încât $n = k^2$

Cazul 1: Dacă primul număr de două cifre este 16 (primele două cifre ale numărului de 6 cifre sunt 1, respectiv 6)

$$160000 \le n \Big| \Rightarrow 160000 \le k^2 \Leftrightarrow$$
$$n = k^2$$

$$400^2 \le k^2 \Leftrightarrow$$

$$400 \le k$$

Dacă $k = 400$, $n = 160000$. $\overline{00}$ nu este un număr de 2 cifre $\Rightarrow$ nu convine

Dacă $k = 401$, $n = 160801$. $\overline{01}$ nu este un număr de 2 cifre $\Rightarrow$ nu convine

Dacă $k = 402$, $n = 161604$. $\overline{04}$ nu este un număr de 2 cifre $\Rightarrow$ nu convine

Dacă $k = 403$, $n = 162409$. $\overline{09}$ nu este un număr de 2 cifre $\Rightarrow$ nu convine

Dacă $k = 404$, $n = 163216$. 32 nu este un pătrat perfect $\Rightarrow$ nu convine

Dacă $k = 405$, $n = 164025$. 40 nu este un pătrat perfect $\Rightarrow$ nu convine

Dacă $k = 406$, $n = 164836$. 48 nu este un pătrat perfect $\Rightarrow$ nu convine

② - Continuare

Dacă $k=407$, $n=165649.56$ nu este un pătrat perfect $\Rightarrow$ nu convine.

Dacă $k=408$, $n=166464$ - convine

Dacă $k=409$, $n=167281.72$ nu este pătrat perfect $\Rightarrow$ nu convine.

Dacă $k=410$, $n=168100.\overline{00}$ nu este un număr de 2 cifre $\Rightarrow$ nu convine

Dacă $k=411$, $n=168921.89$ nu este un pătrat perfect $\Rightarrow$ nu convine

Dacă $k=412$, $n=169744.97$ nu este un pătrat perfect $\Rightarrow$ nu convine

Dacă $k \geq 413$, $n \geq 170569$ dar primele două cifre ale lui n sunt 1, respectiv 6

Cazul 2: Dacă primul număr de două cifre este 25 (primele două cifre ale numărului de 6 cifre sunt 2 respectiv 5)

$\Rightarrow 250000 \leq n \Big\}$
$\quad n = k^2$ $\Rightarrow 500^2 \leq k^2 \Longleftrightarrow$

$500 \leq k$

Dacă $k=500$, $n=250000.\overline{00}$ nu este un număr de două cifre $\Rightarrow$ nu convine

Dacă $k=501$, $n=251001.\overline{01}$ nu este un număr de două cifre $\Rightarrow$ nu convine

② - Continuare

Dacă $k=502$, $n=252004$. 04 nu este un număr de 2 cifre $\Rightarrow$ nu convine

Dacă $k=503$, $n=253009$. 09 nu este un număr de 2 cifre $\Rightarrow$ nu convine

Dacă $k=504$, $n=254016$. 40 nu este un pătrat perfect $\Rightarrow$ nu convine

Dacă $k=505$, $n=255025$. 50 nu este un pătrat perfect $\Rightarrow$ nu convine

Dacă $k=506$, $n=256036$. 60 nu este un pătrat perfect $\Rightarrow$ nu convine

Dacă $k=507$, $n=257049$. 70 nu este un pătrat perfect $\Rightarrow$ nu convine

Dacă $k=508$, $n=258064$. 80 nu este un pătrat perfect $\Rightarrow$ nu convine

Dacă $k=509$, $n=259081$. 90 nu este un pătrat perfect

Dacă $k \geq 510$, $n \geq 260100$ dar primele două cifre ale lui n sunt 2, respectiv 6 $\Rightarrow$ nu convine

Cazul 3: Dacă primul număr de două cifre este 36 (primele 2 cifre ale numărului de 6 cifre sunt 3, respectiv 6)

$n \geq 360000$

$\left. \begin{array}{l} n \geq 360000 \\ n = k^2 \end{array} \right\} \Rightarrow k^2 \geq 360000 \iff$

$k \geq 600$

① - Continuare

Dacă k = 600, n = 360000.$\overline{00}$ nu este un număr de două cifre ⇒ nu convine

Dacă k = 601, n = 361201.$\overline{01}$ nu este un număr de două cifre ⇒ nu convine

Dacă k = 602, n = 362404.$\overline{04}$ nu este un număr de două cifre ⇒ nu convine

Dacă k = 603, n = 363609.$\overline{09}$ nu este un număr de două cifre ⇒ nu convine

Dacă k = 604, n = 364816.48 nu este un pătrat perfect ⇒ nu convine

Dacă k = 605, n = 366025.60 nu este un pătrat perfect ⇒ nu convine

Dacă k = 606, n = 367236.72 nu este un pătrat perfect ⇒ nu convine

Dacă k = 607, n = 368449.84 nu este un pătrat perfect ⇒ nu convine

Dacă k = 608, n = 369664.96 nu este un pătrat perfect ⇒ nu convine

Dacă k = 609, n = 370881 dar n are primele cifre 3, respectiv 6 ⇒ nu convine

Cazul 4: Dacă primul număr de două cifre este 49 (primele 2 cifre ale lui n sunt 4, respectiv 9)

⇒ n ≥ 490000 | ⇒ k² ≥ 490000 ⇔

n = k²

② - Continuare

$k^2 \geq 700^2 \Longleftrightarrow$

$k \geq 700$

Dacă $k = 700$, $n = 490000.\overline{00}$ nu este un număr de două

cifre $\Rightarrow$ nu convine.

Dacă $k = 701$, $n = 491401.\overline{01}$ nu este un număr de două

cifre $\Rightarrow$ nu convine.

Dacă $k = 702$, $n = 492804.\overline{04}$ nu este un număr de două

cifre $\Rightarrow$ nu convine.

Dacă $k = 703$, $n = 494209.\overline{09}$ nu este un număr de două

cifre $\Rightarrow$ nu convine.

Dacă $k = 704$, $n = 495616.56$ nu este un pătrat perfect

$\Rightarrow$ nu convine.

Dacă $k = 705$, $n = 497025.70$ nu este un pătrat perfect

$\Rightarrow$ nu convine.

Dacă $k = 706$, $n = 498436.84$ nu este un pătrat perfect

$\Rightarrow$ nu convine.

Dacă $k = 707$, $n = 499849.48$ nu este un pătrat perfect

$\Rightarrow$ nu convine.

Dacă $k \geq 708$, $n \geq 501264$ dar primele două cifre ale

lui n sunt 4, respectiv 9 $\Rightarrow$ nu convine.

Cazul 5: Dacă primul număr de două cifre este 66

(primele două cifre ale lui n sunt 6, respectiv 6)

$\Rightarrow n \geq 640000$ $\Rightarrow k^2 \geq 800^2 \Longleftrightarrow$

$n = k^2$

6/13

① - Continuare

$k \geq 800$

Dacă $k=800$, $n=640000.\overline{00}$ nu este un număr de 2 cifre
$\Rightarrow$ nu convine

Dacă $k=801$, $n=641601.\overline{01}$ nu este un număr de 2 cifre
$\Rightarrow$ nu convine

Dacă $k=802$, $n=643204.\overline{04}$ nu este un număr de 2 cifre
$\Rightarrow$ nu convine

Dacă $k=803$, $n=644809.\overline{09}$ nu este un număr de 2 cifre
$\Rightarrow$ nu convine

Dacă $k=804$, $n=646416$ - convine

Dacă $k=805$, $n=648025 - 80$ nu este un pătrat perfect
$\Rightarrow$ nu convine

Dacă $k=806$, $n=649636 - 96$ nu este un pătrat perfect
$\Rightarrow$ nu convine

Dacă $k \geq 807$, $n \geq 651249$ dar primele două cifre ale
lui n sunt 6, respectiv 4 $\Rightarrow$ nu convine

Cazul 6: Dacă primul număr de două cifre este 81
(primele două cifre ale lui n sunt 8, respectiv 1)
$\Rightarrow n \geq 810000$
$n = k^2$
$\Rightarrow k^2 \geq 900^2 \Leftrightarrow$
$k \geq 900$

Dacă $k=900$, $n=810000.\overline{00}$ nu este un număr de 2
cifre $\Rightarrow$ nu convine

① - Continuare

Dacă $k=901$, $n=811801 . \overline{01}$ nu este un număr de 2 cifre $=>$ nu convine

Dacă $k=902$, $n=813604 . \overline{04}$ nu este un număr de 2 cifre $=>$ nu convine

Dacă $k=903$, $n=815409 . \overline{09}$ nu este un număr de 2 cifre $=>$ nu convine

Dacă $k=904$, $n=817216 . 72$ nu este un pătrat perfect $=>$ nu convine

Dacă $k=905$, $n=819025 . 90$ nu este un pătrat perfect $=>$ nu convine

$=>$ Numărul de 6 cifre poate fi 166464 sau 646416

③

Suma unghiurilor într-un pentagon este $540°$

$\Rightarrow m(\hat{A}) + m(\hat{B}) + m(\hat{C}) + m(\hat{D}) + m(\hat{E}) = 540° \Leftrightarrow$

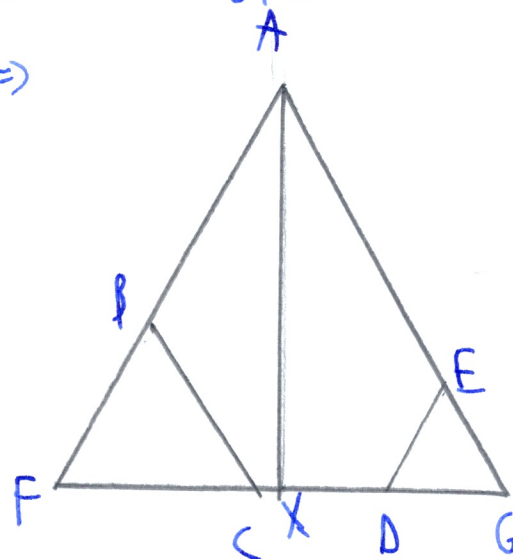$4 \cdot m(\hat{B}) = 540° - 60° \Leftrightarrow$

$4 \cdot m(\hat{B}) = 480° \Leftrightarrow$

$m(\hat{B}) = m(\hat{C}) = m(\hat{D}) = m(\hat{E}) = 120°$

Notez cu $\{F\} = AB \cap CD$ și

$\{G\} = AE \cap CD$

Notez lungimea laturii BC cu x și lungimea laturii DE cu y

$m(\widehat{FBC}) + m(\widehat{ABC}) = 180° \Leftrightarrow$

$m(\widehat{FBC}) + 120° = 180° \Leftrightarrow$

$m(\widehat{FBC}) = 60°$

$m(\widehat{BCF}) + m(\widehat{BCD}) = 180° \Leftrightarrow$

$m(\widehat{BCF}) + 120° = 180° \Leftrightarrow$

$m(\widehat{BCF}) = 60°$

În $\triangle BCF, m(\widehat{BCF}) + m(\widehat{BFC}) + m(\widehat{CBF}) = 180° \Leftrightarrow$

$m(\widehat{BFC}) + 120° = 180° \Leftrightarrow$

$m(\widehat{BFC}) = 60°$

$m(\widehat{BCF}) = 60°$ $\left.\vphantom{\begin{array}{c}a\\b\\c\end{array}}\right\} \Rightarrow \triangle BCF$ - echilateral $\Rightarrow CF = BF = BC = x$

$m(\widehat{FBC}) = 60°$

③ - Continuare

$m(A\widehat{E}D) + m(D\widehat{E}G) = 180° \Leftrightarrow$

$m(D\widehat{E}G) + 120° = 180° \Leftrightarrow$

$m(D\widehat{E}G) = 60°$

$m(C\widehat{D}E) + m(E\widehat{D}G) = 180° \Leftrightarrow$

$m(E\widehat{D}G) + 120° = 180° \Leftrightarrow$

$m(E\widehat{D}G) = 60°$

În $\triangle DEG, m(D\widehat{E}G) + m(E\widehat{D}G) + m(D\widehat{G}E) = 180°$

$\Rightarrow m(D\widehat{G}E) + 120° = 180° \Leftrightarrow$

$\left. \begin{array}{l} m(D\widehat{G}E) = 60° \\ m(E\widehat{D}G) = 60° \\ m(D\widehat{E}G) = 60° \end{array} \right| \Rightarrow \triangle DEG - echilateral \Rightarrow DG = GE = DE = y$

$m(B\widehat{F}C) = 60° \Rightarrow m(A\widehat{F}G) = 60°$

$m(D\widehat{G}E) = 60° \Rightarrow m(A\widehat{G}F) = 60°$

$\left. \begin{array}{l} m(A\widehat{F}G) = 60° \\ m(A\widehat{G}F) = 60° \\ m(F\widehat{A}G) = 60° \end{array} \right| \Rightarrow \triangle AFG - echilateral \Rightarrow AF = GF = AG$

$AF = GF = AG \Leftrightarrow$

$AB + BF = FC + CD + DG = AE + GE \Leftrightarrow$

$6 + x = 9 + x + y = 7 + y$

$6 + x = 9 + x + y \Leftrightarrow$

$\boxed{y = 2}$

$9 + x + y = 7 + y \Leftrightarrow$

$\boxed{x = 3}$

③ Continuare

$AF = AB + BF$ (=)

$AF = 6 + 7$ (=)

$AF = 9$

Fie X - proiecția lui A pe dreapta (D) => $d(A,(D)) = AX$

În $\triangle$ echilateral AFG de latură 9, AX - înălțime

$=> AX = \dfrac{9\sqrt{3}}{2}$

$=> d(A,(D)) = \dfrac{9\sqrt{3}}{2}$

④ Voi considera x-impar

Propozițiile de forma „$x + 2k$ este divizibil cu $2020 - 2k$", $k \in \{1, 2, \dots 1009\}$, nu sunt corecte deoarece $x + 2k$ este impar iar $2020 - 2k$ este par deci $x + 2k$ nu poate fi divizibil cu $2020 - 2k \Rightarrow 1009$ dintre cele 2018 de propoziții nu sunt corecte $\Rightarrow$ Mai rămâne de demonstrat că există x-impar, $x \in \mathbb{N}^*$ astfel încât celelalte 1009 de propoziții să fie corecte.

$$2019 \mid x+1$$
$$2019 \mid 2019$$
$$\overline{} \; (+)$$
$$2019 \mid x + 2020$$

$$2017 \mid x+3$$
$$\underline{2017 \mid 2017} \; (+)$$
$$2017 \mid x + 2020$$

$$-\; -\; -\; -\; -\; -$$
$$-\; -\; -\; -\; -\; -$$

$$3 \mid x + 2017$$
$$3 \mid 3$$
$$\overline{} \; (+)$$
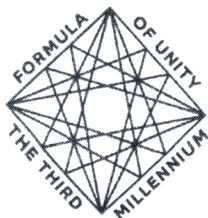$$3 \mid x + 2020$$

$$3 \mid x + 2020$$
$$5 \mid x + 2020$$
$$-\; -\; -\; -\; -$$
$$2019 \mid x + 2020$$

$x = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots 2019 - 2020$ este impar și întrunește condițiile din enunț $\Rightarrow$ Există un astfel de x. ✓

⑤ Ordonând crescător sumele B poate știi de la ce numere provin unele sume.

Fie $a \le b \le c \le d \le e \le f \le g \le h$, cele 8 numere, ordonate crescător. B va știi că cea mai mică dintre cele 28 de sume este $a+b$, a doua cea mai mică este $a+c$, cea mai mare este $g+h$ și a doua cea mai mare este $f+h$. Adunând toate cele 28 de sume și împărțind rezultatul la 7, B poate afla suma celor 8 numere

$\Rightarrow$ B - poate câștiga

Problems for the class R8

1. In the picture on the left, you can find five triangles (four small and one big). And how many triangles can you find in the picture on the right?
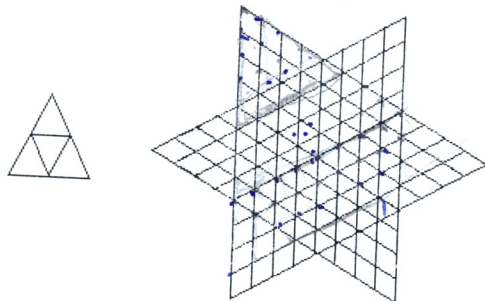
2. Three students write on a whiteboard 3 two-digit perfect squares next to each other. Surprisingly the 6-digit number obtained is also a perfect square! Find all possible values of this number.

3. In a convex pentagon $ABCDE$, $\angle A = 60°$, and all other angles are equal. It is known that $AB = 6, CD = 4, EA = 7$. Find the distance from A to the line CD.

4. Is there a positive integer x such that exactly half of the propositions "$x + 1$ is divisible by 2019", "$x + 2$ is divisible by 2018", "$x + 3$ is divisible by 2017", ..., "$x + 2017$ is divisible by 3", "$x + 2018$ is divisible by 2" are correct?

5. Two players A and B are playing the following game. A chooses 8 real numbers. (Some of these numbers could be equal to each other.) On a piece of paper, A writes sums of all possible sets of 2 of these numbers in an arbitrary order. Next, A gives the paper to B. (This paper contains 28 sums; some of these sums could be equal to each other.) B wins if he can figure out the 8 original numbers on the first guess. Is there a way for B to definitely win the game?

Rules of the final round of the Olympiad "Formula of Unity" / "The Third Millennium" 2018/19

1. Participants of the final round include the winners of the qualifying round as well as all those who received diplomas for winning in the Olympiad 2017/18. The locations and dates of the final round are listed on the page http://www.formulo.org/en/olymp/2018-math-en/

2. The round will last for 4 hours.

3. It is necessary to bring your pens and paper with you. The participants are not allowed to use calculators, computers, telephones, any other communication tools.

4. Solutions should be written in Esperanto, English, French, Georgian, German, Persian, Romanian, Russian, Spanish, Ukrainian, or Uzbek.

5. The participants are to fill in a participant form they receive before the beginning of the final round. (The time for filling in the participants form is not included into 4 hours.) The paper sheets with solutions should not include the participant's name and other personal data.

6. Since the date of the 2nd round varies in different countries, the participants and organizers are asked not to publish the problems on the web before March 7.

7. Preliminary results of the Olympiad will be published on http://formulo.org before March 24, 2018. Appeals (requests to reconsider one's solutions) can be submitted within 3 days thereafter.

Information for the organizers

1. The Organizing Committee asks the local organizers to ensure participants' compliance with the rules. The time necessary to fill in the participant form is not included into 4 hours provided for solving problems.

2. The Olympiad papers are to be scanned and sent to *solv@formulo.org* within 3 days after the date of the final round. The papers of participants of **different grades** should be e-mailed in **separate messages**. Participant forms are to be e-mailed along with the papers in the same messages. The subjects of the messages should include the words "Final round", the name of the host organization and the grade (R5, R6, etc). The file names should follow an example: solutions1.pdf, form1.pdf, solutions2.pdf, form2.pdf.

3. The papers of unofficial participants (not including the papers marked by the local organizers) should be sent in separate messages with subject lines such as "Final round, unofficial participants, University of Nankago, R5".

4. In case of any uncertainty, please contact the Organizing Committee by *olimp@formulo.org*.