№2

Пусть x^2, y^2, z^2 – это двузначные квадраты, которые склеили в соответствующем порядке (сначала x^2, потом y^2, потом z^2)

Тогда $10000 \cdot x^2 + 100 \cdot y^2 + z^2 = a^2$, где a^2 – шестизначный квадрат.

$$a = \sqrt{10000x^2 + 100y^2 + z^2}$$

Так как a – ~~целое~~ натуральное, и x^2, y^2, z^2 – тоже натуральные, т.к. квадраты целых чисел, выражение $10000x^2 + 100y^2 + z^2$ – тоже должно быть квадратом. Но тогда его можно „свернуть" формулой квадрата суммы (только квадратом суммы, а не квадратом разности, т.к. x^2, y^2, z^2 – натуральные).

Тогда $x^2 \cdot 10000 + 100y^2 + z^2 =$

$= (100 \cdot x)^2 + 2 \cdot 100 \cdot \cancel{z} \cdot x + z^2 = (100\cancel{x} + z)^2$

Но тогда $100y^2 = 200xz$

$y^2 = 2xz$

$y = \sqrt{2xz}$

Но т.к. y - целое:

либо $x = \frac{z}{2}$, либо $z = \frac{x}{2}$ (иначе y - будет иррациональным за счет квадратного корня)

Все двузначные точные квадраты:

$16(4^2)$; $25(5^2)$; $36(6^2)$; $49(7^2)$; $64(8^2)$; $81(9^2)$

Значит $4 \le x; y; z \le 9$.

Единственные два числа, различные в 2 раза, в данном диапазоне это 4 и 8.

Пусть $x = 8$, тогда $z = 4$; $y = \sqrt{8 \cdot 2 \cdot 4} = 8$.

$a^2 = 646416$ (склеенные 3 квадрата: 64, 64, 16)

$a = (100 \cdot 8 + 4)^2 = 804^2 \neq$ ~~646416~~

Проверка:

$a^2 = 804^2 = 646416$

Все сходится, значит одно из таких шестизначных чисел 646416.

Пусть $x = 4$, тогда $z = 8$, $y = \sqrt{4 \cdot 2 \cdot 8} = 8$

$a^2 = 166464$ (склеенные квадраты)

$a = 4 \cdot 100 + 8 = 408$

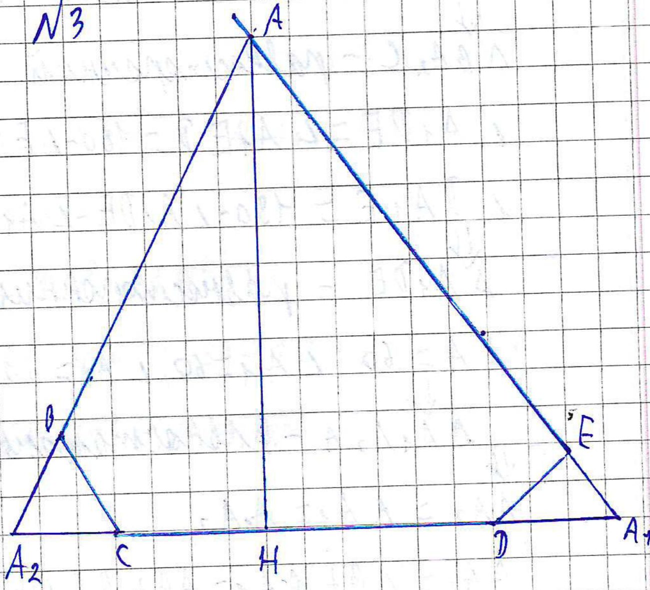
Проверка:

$a^2 = 408^2 = 166464$

Все сходится, значит второе и последнее, так как больше нет вариантов такое шестизначное число это 166464.

Ответ: 646416 и 166464.

№3



Дано:

$\angle A = 60^\circ$

$\angle B = \angle C = \angle D = \angle E$

$AB = 6$

$CD = 4$

$EA = 7$

Найти расстояние от точки A до CD.

Решение:

$(5-2)\cdot 180 = 540$ – сумма углов пятиугольника

(вычислена по формуле $(n-2)\cdot 180$, где n – кол-во вершин в фигуре)

$\angle B + \angle C + \angle D + \angle E = 4\cdot\angle B = 540 - 60 = 480$ ($\angle B + \angle C + \angle D + \angle E = 540 - \angle A$)

$\angle B = 480 : 4 = 120$

Продлим AB и AE до пересечения с прямой CD в точках A_2 и A_1 соответственно.

$\angle A_2BC = \angle A_2CB = 180 - \angle B = 180 - 120 = 60$ (т.к. смежные)

$\angle BA_2C = 180 - \angle A_2BC - \angle A_2CB = 180 - 60 - 60 = 60$ (т.к сумма углов

$\Downarrow$

ΔBA_2C – равносторонний.

$\angle A_1DE = \angle A_1ED = 180 - \angle E = 180 - 120 = 60$

$\angle DA_1E = 180 - \angle A_1DE - \angle A_1ED = 180 - 60 - 60 = 60$

$\Downarrow$

ΔA_1DE – равносторонний.

$\angle A = 60$; $\angle A_1 = 60$, $\angle A_2 = 60$

$\Downarrow$

ΔA_1A_2A – равносторонний

$\Downarrow$

$AA_2 = AA_1 = A_1A_2$

$AA_2 = AB + BA_2 = AB + BC$ (т.к ΔA_2BC – равносторонний

$AA_1 = AE + EA_1 = AE + DE$ (т.к. ΔA_1DE – равносторонний.

$A_1A_2 = A_2C + CD + A_1D = BC + CD + DE$

$AA_2 = A_1A_2$

$\Downarrow$

$AB + BC = BC + CD + DE$

$DE = AB - CD = 6 - 4 = 2$

$A_1A_2 = AA_1$

$BC + CD + DE = AE + DE$

$BC = AE - CD = 7 - 4 = 3$

$AA_1 = AE + DE = 7 + 2 = 9$

Проведем высоту AH. Она является и высотой и медианой и биссектрисой, т.к. $\triangle AA_1A_2$ – равносторонний.

$A_1H = \frac{1}{2} A_1A_2 = \frac{1}{2} \cdot 9 = 4,5$ (т.к. $A_1A_2 = AA_1$)

По теореме Пифагора:

$AA_1^2 = A_1H^2 + AH^2 = 4,5^2 + AH^2$

$AH^2 = AA_1^2 - 4,5^2 = 9^2 - 4,5^2 = 81 - 20,25 = 60,75$

$AH = \sqrt{60,75} = 5 \cdot 3^2 \cdot 0,1 \cdot \sqrt{3} = 4,5 \cdot \sqrt{3}$

Ответ: $4,5 \cdot \sqrt{3}$

№4

Пусть y - слагаемое в выражении про кратность, а z - число на которое проверяется кратность, например в выражении: „$x+1$ кратно 2019", $y=1$, а $z=2019$.

Заметим, что выражений где z - четное и где z - нечетное поровну, так как ~~кол-во~~ все возможные z можно выписать в ряд в порядке возрастания и это будет ряд последовательных чисел, начинающийся на четное число (2) и заканчивающийся на нечетное число (2019) (всего в ряду будет $2019-2+1=2018$ чисел среди которых $2018:2=1009$ - четных и 1009 - нечетных)

Заметим, что $y+z=2020$ в любом выражении, пример: „$x+2$ кратно 2018", $2018+2=2020$ (т.к. если увеличивается y на какое-то число, то z уменьшается на тоже самое число)

Пусть $x=3\cdot5\cdot7\ldots\cdot2017\cdot2019-2020$, где $3\cdot5\cdot7\ldots\cdot2017\cdot2019$ - это произведение всех встречающихся нечетных z (произведение нечетных чисел от 3 до 2019)

Если y – нечетное, то z – тоже нечетное (т.к. $2020 - y = z$ и четное минус нечетное равно нечетное):

$3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots z \ldots \cdot 2019 - 2020 + y = z \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots \cdot 2019 - z =$

$= z \cdot (3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots \cdot 2019 - 1)$ – выражение

$\Downarrow$

выражение делится на z (т.к. среди нечетных чисел от 3 до 2019 найдутся все возможные нечетные z)

Если y – четное, то z – тоже четное (т.к. $z = 2020 - y$ и четное минус четное равно четное):

$3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots \cdot 2019 - 2020 + y$ – выражение.

$3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots \cdot 2019$ – нечетное, т.к. произведение нечетных чисел.

$y - 2020$ – четное, т.к. разность четных чисел.

$\Downarrow$

$3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots \cdot 2019 + y - 2020$ – нечетное (сумма четного и нечетного)

$\Downarrow$

$(3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots \cdot 2019 + y - 2020) \not\vdots\, z$, т.к. нечетное не делится на четное.

Значит при $n = 3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots \cdot 2019 - 2020$ все

выражения с нечетным z выполняются, а с четным z – нет. Значит при таком n выполняется ровно половина выражений, т.к. выражений с четным z и нечетным z поровну.
(n – натуральное и данное решение не противоречит условию, т.к. $3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot 2019 < 2020$.)
Ответ: существует.

№1

Посчитаем кол-во треугольников у которых хотя бы одна вершина вне шестиугольника (который находиться по середине)
Всего вершин вне ~~его~~ шестиугольника 60.
Для каждой из них есть 9 вариантов выбрать пару вершин для треугольника.
Значит таких треугольников $60 \cdot 9 = 540$.
~~Же, т.к. ни один из них не повторится.~~
~~Теперь посчитаем тре.~~ Среди них только самые большие треугольники повторятся, значит таких треугольников $540 - 4 = 536$

Теперь посчитаем число треугольников внутри шестиугольника.

Сначала рассмотрим вершины лежащие на сторонах шестиугольника и на его вершинах. Вершин всего ~~18~~, 24.

~~Вершины шестиугольника нужно посчитать дважды, т.к. треугольники из него могут выходить в две стороны от прямой, соединяющей его с противоположной вершиной.~~

Для каждой из них есть 4 варианта выбрать пару вершин для треугольника: ~~24 · 4 = 96~~. Но для вершин, лежащих на сторон. и не являющихся вершинами шестиугольника есть дополнительные варианты:

$24 \cdot 4 + 9 \cdot 6 = 96 + 54 = 150$

Теперь рассмотрим шестиугольник поменьше для него есть:

$3 \cdot 18 + 3 \cdot 6 = 54 + 18 = 72$ треугольника с вершинами на сторонах

Теперь рассмотрим шестиугольник помение: Для него есть:

$2 \cdot 12 + 1 \cdot 6 = 30$ треугольников.

Рассмотрим ~~шестиугольник~~ самый маленький шестиугольник. В нем всего 6 треугольников.

$536 + 150 + 72 + 30 + 6 = 794$ треугольников всего.

Ответ: 794.

№ 5

Найдем 3 пары сумм, суммы каждой из пар которых равны.

Назовем эти суммы z_n, где n - некоторое число.

Пусть 1-ая пара это z_1 и z_2, 2-ая это z_3 и z_4, 3-я z_5 и z_6.

Рассмотрим 8 разностей сумм:

1. $2 \cdot (z_1 + z_2) - z_3 - z_5 - z_1$
2. $2 \cdot (z_1 + z_2) - z_2 - z_3 - z_5$
3. $2 \cdot (z_1 + z_2) - z_1 - z_4 - z_5$
4. $2 \cdot (z_1 + z_2) - z_2 - z_4 - z_5$
5. $2 \cdot (z_1 + z_2) - z_1 - z_4 - z_6$
6. $2 \cdot (z_1 + z_2) - z_2 - z_4 - z_6$

7. $2\cdot(z_1+z_2)-z_1-z_3-z_6$

8. $2\cdot(z_1+z_2)-z_2-z_3-z_6$

Найдем среди них четверки чисел, суммы которых равны z_1+z_2.

В одной из этих четверок 4 числа из загаданных чисел.

Рассмотрим все такие тройки пар. ~~Всего их.~~ ~~Некот~~ Также найдем среди них все $\cancel{\frac{8\cdot7\cdot6\cdot5}{4}=420}$ такие четверки чисел, в них будут повторяться числа. Если числа повторяются, то они загаданы т.к. одни и те же числа во многих парах.

Значит таким образом можно найти все загаданные числа.

Ответ: можно.