

№1

Заметим, что треугольник образуют любые 3 прямые общего положения, также заметим, что прямые бывают трёх направлений. Посчитаем сначала все пересечения прямых, а потом вычтем кол-во пересечений трёх в 1 точке. $9^3 - 9 \cdot 9 = 9^3$, пересечения 3 в 1 точке бывают только в пятиугольнике нашей звезды, и их там 61 $\Rightarrow$ ответ: $9^3 - 61 = 729 - 61 = 668$.

№4

Ответ: существует

Пример: $x = (\text{произведение всех нечётных чисел от 1 до } 2020) - 2020$

Оценка: Нам даны уравнения вида: ~~$x \equiv y \pmod{2020}$~~ ~~$x \equiv y \pmod{2020}$~~ ~~$x \equiv y \pmod{2020}$~~

$x + (2020 - y) \equiv 0 \pmod{y} \Leftrightarrow x + 2020 \equiv y \pmod{y}$, где $y \in \mathbb{N}, 1 \leq y \leq 2020$, мы хотим, чтобы y делил разность между этими значениями, для x из примера очевидно работает для всех нечёт. y , а т.к. $y + 2020$ нечётно, то для чёт. y не работает.

№5.

перые числа это: $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq a_8$, а вторые это: $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_8$.

Тогда заметим, что $a_1 + a_2 = b_1$ - очевидно, аналогично $a_1 + a_3 = b_2$

$a_2 + a_3 = b_3$, это просто доказывается. тогда заметим, что

~~a_3~~ $= \frac{b_3 + b_2 - b_1}{2}$, но зная a_3 мы также знаем a_1 и a_2 . Заметим,

что $b_4 = a_1 + a_4 \Rightarrow$ мы знаем a_4 , аналогично скажем, что

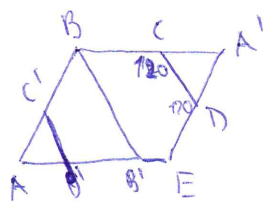
$b_{28} = a_4 + a_8$, $b_{27} = a_8 + a_6$, $b_{26} = a_7 + a_6$, $b_{25} = a_8 + a_5$ и аналогично

заметим, что ~~a_6~~ $= \frac{b_{28} + b_{27} + b_{26} - b_{28}}{2}$, а тогда мы знаем ост. 3 числа,

мы можем $\&$ ч найд. и ч можем найти $\Rightarrow$ мы можем все 8 чисел.

13

Решение:



Составим фигуру: $\sum$ углов в замк. фг. $= 720 - (5-2) \cdot 180 = 540$
 $\angle ABC = \frac{540 - 60}{4} = 120$, проведем бис. BB' , она пересекла
 прямую AE в B' , но тогда $\triangle ABB'$ - равност. $\Rightarrow$ т.р.

$AB = 6$, но $AB' = 6$, но $AE = 4 \Rightarrow B'$ лежит на отрез. AE ; $\angle A + \angle ABC = 180$

$\Rightarrow AE \parallel BC$; $\angle A + \angle E = 180 \Rightarrow AB \parallel ED$; $\angle B'BC + \angle BCD = 180 \Rightarrow BB' \parallel CD$.

продлим ED и BC до их пересечения - A' , тогда $ABA'E$ - параллелограмм.

из выше сказанного. $\angle A'CD = \angle A'DC = 60 \Rightarrow CA'D$ - равност. $\Rightarrow CA' = 4$.

$4 = AE = BA' \Rightarrow BC = BA' - CA' = 4 - 4 = 3$. Согласно симметрии отложим.

BB' , тогда с перпен. в C' , D в D' . $BC' = BC = 3 \Rightarrow AC' = 3$ т.р. заметим,

что перпендикуляр из A на CD превращается в перп. из A к BB' +
 перп. от BB' к $C'D'$, но по т. Паскаля т.р. $C'D' \parallel BB'$ и $AC' = BC'$,

то перп. от BB' к $C'D' =$ перп. из A к $C'D'$, а все из той же т. Паскаля

перп. из A к $C'D'$ в 2р. меньше перп. из A к BB' т.р. $AB = 2AC' \Rightarrow$

перп. из A к $CD = 1,5 \cdot (\text{перп. из } A \text{ к } BB')$; перп из A к BB' ~~не~~ $=$

$= \sqrt{AB^2 - \left(\frac{BB'}{2}\right)^2}$ т.р. высота в равн. $\triangle$ - медиана. $\sqrt{AB^2 - \left(\frac{BB'}{2}\right)^2} =$

$= \sqrt{36 - 9} = 3\sqrt{3}$. $\frac{3}{2} \cdot 3\sqrt{3} = \frac{9}{2}\sqrt{3}$ Ответ: перпендику-
 ляр равен $\frac{9}{2}\sqrt{3}$.

№2

Решение: перепишем условие в виде:

$$100a^2 + 100b^2 + c^2 = d^2. \text{ Пусть } d = 100y \Rightarrow d^2 = (100x+y)^2 = \overbrace{100^2 x^2}^{100} + \overbrace{200xy}^{100} + y^2 \text{ т.е.}$$

d^2 оканчивается на y^2 , но с другой стороны на c^2 ($\overbrace{100a^2}^{100} + \overbrace{100b^2}^{100} + c^2$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow c=y \Rightarrow d^2 = (100x+c)^2$, но c^2 - глупое число $\Rightarrow c$ - озорное число,

т.е. d варьирует max: $\overline{x0c}$ т.е. в $d < 4$ знаков иначе $d^2 \geq 100000$, и

≥ 3 знака, иначе $d \leq 10000 (10^5)$. Запомним, что для x есть 6 вариантов

(1-9), пусть $x \leq 3 \Rightarrow d \leq 309 \Rightarrow d^2 \leq 100000$; также запомним, что $c \geq 4$,

иначе $c^2 < 10$. В итоге y нас есть 36 случаев.

$\times d = 404 \quad d^2 = 163216$ (скобочкой я показываю те квадраты)

$\times d = 405 \quad d^2 = 164025$

$\times d = 406 \quad d^2 = 164836$

$\times d = 407 \quad d^2 = 165649$

✓ $d = 408 \quad d^2 = 166464$

$\times d = 409 \quad d^2 = 167281$

$\times d = 504 \quad d^2 = 254016$

$\times d = 505 \quad d^2 = 255025$

$\times d = 506 \quad d^2 = 256036$

$\times d = 507 \quad d^2 = 257049$

$\times d = 508 \quad d^2 = 258064$

$\times d = 509 \quad d^2 = 259081$

$\times d = 604 \quad d^2 = 364816$

$\times d = 605 \quad d^2 = 366025$

$\times d = 606 \quad d^2 = 367236$

$\times d = 607 \quad d^2 = 368449$

$\times d = 608 \quad d^2 = 369664$

$\times d = 609 \quad d^2 = 370881$

$\times d = 704 \quad d^2 = 495616$

$\times d = 705 \quad d^2 = 497025$

$\times d = 706 \quad d^2 = 498436$

$\times d = 707 \quad d^2 = 499849$

$\times d = 708 \quad d^2 = 501264$

$\times d = 709 \quad d^2 = 502681$

✓ $d = 804 \quad d^2 = 646416$

$\times d = 805 \quad d^2 = 648025$

$\times d = 806 \quad d^2 = 649636$

$\times d = 807 \quad d^2 = 651249$

$\times d = 808 \quad d^2 = 652864$

$\times d = 809 \quad d^2 = 654481$

$\times d = 904 \quad d^2 = 817216$

$\times d = 905 \quad d^2 = 819025$

$\times d = 906 \quad d^2 = 820836$

$\times d = 907 \quad d^2 = 822649$

$\times d = 908 \quad d^2 = 824464$

$\times d = 909 \quad d^2 = 826281$

Ответ: подходят 2 числа: 408 и 804