№2

Возможные двузначные числа, которые могли написать ученики на доске: 16, 25, 36, 49, 64, 81.

1. Д-тим, что 6-тизначное число начиналось на 16, тогда корень из этого числа начинался на 4. Корень лежит в промежутке [400; 412], т.к. $413^2 = 170569$.
Перебирая числа [400; 412] получаем: 160000, 160801, 161604, 162409, 163216, 164025, 164836, 165649, 166464, 167281, 168100, 168921, 169744. Подходит только 166464

2. Д-тим, что начиналось на 25, корень начинался на 5 и лежал в [500; 509], т.к. $510^2 = 260100$.
Получаем: 250000, 251001, 252004, 253009, 254016, 255025, 256036, 257049, 258064, 259081. Ничего не подходит.

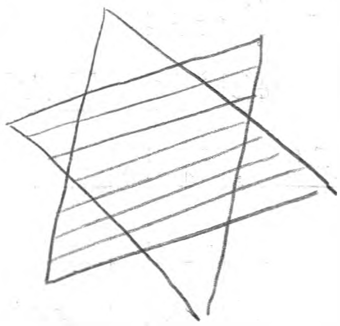
3. Д-тим, что начиналось на 36. Аналогично получаем перебор из [600; 608], т.к. $609^2 = 370881$. Получаем: 360000, 361201, 362404, 363609, 364816, 366025, 367236, 368449, 369664. Ничего не подходит.

4. Д-тим, что начиналось на 49. Аналогично получаем перебор из [700; 707], т.к. $708^2 = 501264$,
Получаем: 490000, 491401, 492804, 494209, 495616, 497025, 498436, 499849.

5. Д-тим, что начинается на 64. Аналогично получаем перебор из [800; 806], т.к. $807^2 = 651249$.
Получаем: 640000, 641601, 643204, 644809, 646416, 648025, 649636. Подходит только 646416.

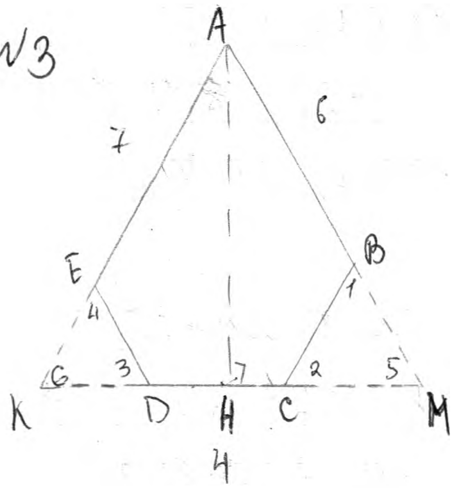
6. Д-тим, что начинается на 81. Аналогично получаем перебор из [900; 905], т.к. $906^2 = 820836$.
Получаем: 810000, 811801, 813604, 815409, 817216, 819025.
Ничего не подходит.
Ответ: 166464, 646416.

№1



Фактически, фигура состоит из 2-х больших треугольников. Суть подсчета заключается в том, что нужно брать каждую возможную вершину треугольника в одном из больших треугольников. Затем считать, сколько в этой вершине Δ, подобных (равных) большому. При этом стороны $\parallel$ сторонам большого.
Так проделать для каждой вершины и, т.к. больших Δ 2, умножить на 2: $(1\cdot 9 + 2\cdot 9 + 3\cdot 9 + 4\cdot 9 + 5\cdot 8 + 6\cdot 7 + 7\cdot 6 + 8\cdot 5 + 9\cdot 4 + 8\cdot 3 + 7\cdot 2 + 6\cdot 1)\cdot 2 =$
$= 668$
Ответ: 668.

№3



Дано: ABCDE, $\angle A = 60°$, $\angle B = \angle C = \angle D = \angle E$,
$AB = 6$, $CD = 4$, $EA = 7$
Найти: AH

Решение

1. Продлим сторону AB, до пересечения со стороной DC в точке M, а сторону EA до пересечения со стороной DC в точке K. Получим $\triangle KAM$.

2. Сумма углов 5-тиугольнике равна: $(5-2)\cdot 180^\circ = 540^\circ$.

3. $\angle B = \angle C = \angle D = \angle E = (540^\circ - 60^\circ) : 4 = 120^\circ$.

4. $\angle 1 = \angle 2 = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$

$\angle 3 = \angle 4 = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$

5. $\angle 5 = \angle 6 = 180^\circ - 60^\circ \cdot 2 = 60^\circ$ Получаем, что $\triangle CBM$ и $\triangle KED$ – равносторонние. А также $\triangle KAM$ – равносторонний. Значит, AH – высота и биссектриса и $\angle KAH = \angle HAM = 30^\circ$.

6. Пусть $KE = KD = a$, $DH = b$, $HC = c$, $CM = MB = d$.

7. $\underline{\triangle KAH}$: KH – катет, лежащий против угла 30°, значит $KH = \frac{1}{2} KA$. Аналогично в $\triangle HAM$ $HM = \frac{1}{2} AM$.

8. Из п. 6,7 следует:

$$\begin{cases} a+7 = 2(a+b) \\ 2(c+d) = 6+d \\ b+c = 4 \\ a+b = c+d \text{ (AH – высота и медиана)} \end{cases} \quad \begin{cases} a = 7-2b \\ d = 6-2c \\ b+c = 4 \\ a+b = c+d \end{cases} \quad \begin{cases} a = 7-2b \\ d = 6-2c \\ b+c = 4 \\ 7-b = 6-c \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 7-2b \\ d = 6-2c \\ b+c = 4 \\ b = 7-6+c \end{cases} \quad \begin{cases} a = 7-2b \\ d = 6-2c \\ 2c+1 = 4 \\ b = c+1 \end{cases} \quad \begin{cases} a = 7-2b \\ d = 6-2c \\ c = 1,5 \\ b = 2,5 \end{cases} \quad \begin{cases} a = 2 \\ d = 3 \\ c = 1,5 \\ b = 2,5 \end{cases}$$

9. По т. Пифагора для $\triangle KAH$:

$(a+b)^2 + AH^2 = (a+7)^2$

$AH^2 = (a+7)^2 - (a+b)^2$

$AH=\sqrt{(a+7)^2-(a+b)^2}=\sqrt{9^2-4,5^2}=\sqrt{(9-4,5)(9+4,5)}=$
$=\sqrt{4,5\cdot 13,5}=\sqrt{4,5\cdot 4,5\cdot 3}=4,5\sqrt{3}$

Ответ: $AH=4,5\sqrt{3}$

№5

Пусть $x_1\geq x_2\geq x_3\geq\ldots\geq x_8$. Очевидно, что наименьшая сумма это x_7+x_8, а наибольшая x_1+x_2. Сложим все суммы вместе и разделим на 7 и получим сумму $x_1+x_2+x_3+\ldots+x_8$. Вычтем найденные нами суммы x_1+x_2 и x_7+x_8 и получим сумму $x_3+x_4+x_5+x_6$. Найдём среднее арифметическое сумм x_1+x_2, x_7+x_8, $x_3+x_4+x_5+x_6$. Тогда получим ряд чисел вида a, a, b, b, b, b, c, c, где a – среднее арифм. x_1+x_2, b – среднее арифм $x_3+x_4+x_5+x_6$, а c – среднее арифм. x_7+x_8. Далее к сумме $a+b$ находим самое близкое из списка сумм, и, не нарушая общности, пусть $x_2+x_3=a+b$; к сумме $b+b$ находим 2 самых близких значения, фактически значения сумм x_3+x_4, x_5+x_6; к сумме $b+c$ находим одно самое близкое значение фактически равное (не наруш. общности) x_6+x_7. Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1+x_2 \\ x_7+x_8 \\ x_3+x_4+x_5+x_6 \\ x_1+x_2+x_3+\ldots+x_8 \\ x_2+x_3 \\ x_3+x_4 \\ x_5+x_6 \\ x_6+x_7 \end{cases}$$

Решая её, мы найдём числа. Стоит отметить, что здесь может нарушиться $x_1\geq x_2\geq x_3\geq\ldots\geq x_8$. В случае, если одной переменной присвоились 2 значения, нужно поменять самую близкую сумму, и делать так до тех пор, пока не найдём числа.

№4

Заметим, что всего присутствует 2018 условий, а $\frac{1}{2} \cdot 2018 = 1009$. Значит должно выполниться 1009 условией. Все данные условия разобьём на пары по принципу: если выполняется условие а, значит автоматически выполняется условие в. Получим 1009 таких пар. Получается, что когда в набор правдивых условий мы будем брать одно условие, нужно будет автоматически взять и другое. Т.е. общее число правдивых условий должно быть чётным, а 1009 — число нечётное. Получили противоречие. Значит такого натурального х, для которого должно выполняться 1009 условий не существует.