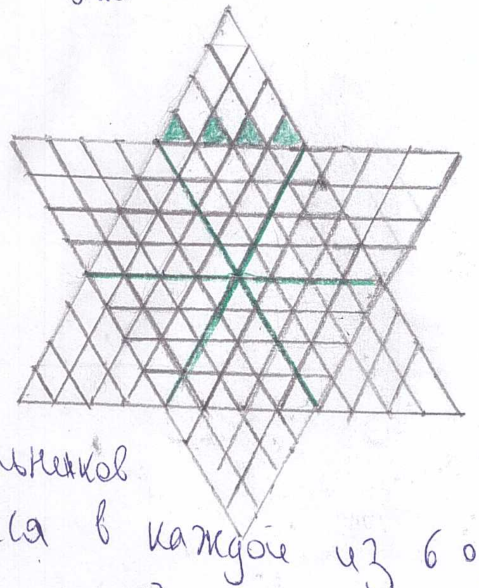
№1

1) Треугольники вида Δ:

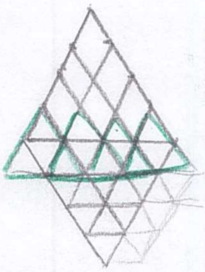
Рис. 1:

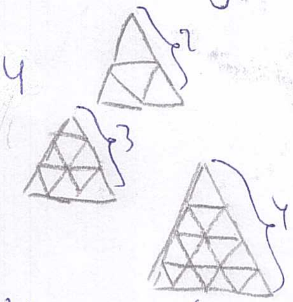


Разобьём фигуру на 6 одинаковых частей (см. рис. 1)

В каждой из них 20 маленьких треугольников $\Rightarrow$ всего $20 \cdot 6 = 120$ маленьких треугольников.

Следующие виды треугольников будем считать, как неповторяющиеся в каждой из 6 одинаковых частей + общие в шестиугольнике.





2) $7 \cdot 6 + 36 \cdot 2 = 42 + 72 = 114$

3) $9 \cdot 6 + 25 \cdot 2 = 54 + 50 = 104$

4) $10 \cdot 6 + 15 \cdot 2 = 60 + 30 = 90$

5) $10 \cdot 6 + 6 \cdot 2 = 60 + 12 = 72$

6) $8 \cdot 6 + 1 \cdot 2 = 48 + 2 = 50$

7) $4 \cdot 6 + 0 = 24$

8) $1 \cdot 6 = 6$

9) $= 0$ 10) $= 0$ 11) $= 0$ 12) $= 2$

Цифра (1... 12) означает сторону треугольника, которая вмещает определённое кол-во (цифра) маленьких треугольников.

Всего: $120 + 114 + 104 + 90 + 72 + 50 + 6 + 2 + 24 = 582$

Ответ: 582

№2

Двузначных чисел, которые являются точными квадратами 6: 16, 25, 36, 49, 64, 81.

Любое шестизначное число, которое является точным квадратом можно представить в виде: $(100 \cdot y + x)^2 = y^2 \cdot 10000 + 2xy \cdot 100 + x^2$

При этом шестизначные числа, которые необходимо нам найти можно представить в виде: $10000 \cdot a^2 + 100 \cdot b^2 + c^2$, т.к. такие числа получены „склеиванием" трёх двузначных чисел, являющимися точными квадратами.

Тогда $y^2 \cdot 10000 + 2xy \cdot 100 + x^2 = 10000a^2 + 100b^2 + c^2$.

Заметим, что $x < 100$, иначе y не максимально возможное при разложении шестизначного числа, являющегося точным квадратом. Тогда для того, чтобы условие выполнялось необходимо, чтобы $a = y$, иначе y не максимально возможное или ~~у~~ первые 2 цифры шестизначного числа не являются полным квадратом. Тогда $y < 10$ и $y \geq 4$.

Тогда $2xy \cdot 100 < 10000$, т.к. $y^2 \cdot 10000 = a^2 \cdot 10000$.

$$2xy < 100$$

$$x < 10 \Rightarrow x = c.$$

Тогда $2xy = b^2 \Rightarrow b \vdots 2 \Rightarrow b^2 \vdots 4 \Rightarrow 2xy \vdots 4 \Rightarrow xy \vdots 2$.

$y = 4 \Rightarrow$ ~~$2xy < 10 \Rightarrow x$~~ $2xy \vdots 8 \Rightarrow b \vdots 4 \Rightarrow b^2 \vdots 16 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2xy \vdots 16 \Rightarrow x \vdots 2 \Rightarrow x = 6$ или 8, но $2 \cdot 6 \cdot 4 = 48$ — не полный квадрат.

$(408)^2 = 166464$

$y = 5 \Rightarrow b \vdots 5 \Rightarrow b^2 \vdots 25 \Rightarrow 2xy \vdots 25 \Rightarrow x \vdots 5$, чего быть не может, т.к. $2 \cdot 5 \cdot 5 = 50$ — не полный квадрат.

$y = 6 \Rightarrow b \vdots 6 \Rightarrow b^2 \vdots 36 \Rightarrow 2xy \vdots 36 \Rightarrow x \vdots 9 \Rightarrow x = 9$, но $2 \cdot 6 \cdot 9$ — не полный квадрат.

$y = 7 \Rightarrow b \vdots 7 \Rightarrow b^2 \vdots 49 \Rightarrow 2xy \vdots 49 \Rightarrow x \vdots 7 \Rightarrow x = 7$, но $2 \cdot 7 \cdot 7 = 49 \cdot 2$ — не полный квадрат.

$y = 8 \Rightarrow b \vdots 4 \Rightarrow b^2 \vdots 16 \Rightarrow x$ — полный квадрат, но $2xy < 10$

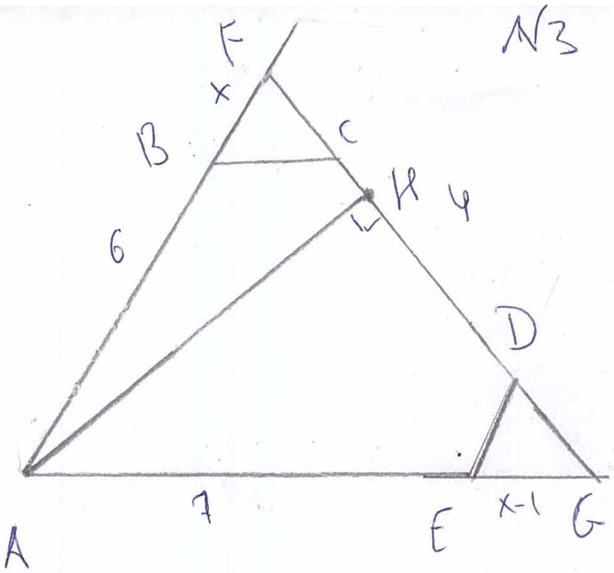
$\Rightarrow x = 4$.

$(804)^2 = 646416$.

~~Ответ~~ $y = 9 \Rightarrow 2x$ — полный квадрат $\Rightarrow x = 8$, но $2xy > 10$.

Ответ: $166464 = (408)^2$; $646416 = (804)^2$.

№3



Дано: $\angle A = 60^\circ$; $\angle B = \angle C = \angle D = \angle E$

$AB = 6$ $CD = 4$ $AE = 7$

т. $H \in$ пр. CD и $AH \perp CD$.

Найти: AH – ?

Решение: Доп. постр.:

1. т. F = пр. $AB \cap$ пр. CD
2. т. G = пр. $AE \cap$ пр. CD.

$\angle A + \angle B + \angle C + \angle D + \angle E = 540^\circ$ (т.к. $ABCDE$ – вып. пят-к).

$\angle A = 60^\circ \Rightarrow \angle B + \angle C + \angle D + \angle E = 540^\circ - 60^\circ = 480^\circ$

$\angle B = \angle C = \angle D = \angle E = \frac{480^\circ}{4} = 120^\circ$.

$\angle CBF = \angle FCB = \angle GDE = \angle GED = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ \Rightarrow$

(как смежн. $\angle$ с углами в 120°).

$\triangle BFC$ и $\triangle DEG$ – равносторонние. (по $\Sigma \angle$ в $\triangle$) $\Rightarrow$

$\triangle AFG$ – равносторонний.

Обозначим $BF = x \Rightarrow AF = FG = AG = x + 6$ (т.к. $AB = 6$)

$EG = AG - AE = x + 6 - 7 = x - 1$

$\triangle AHG$ – прям. $\triangle$ (по постр.) и $\angle AGH = 60^\circ$ (т.к. $\triangle EDG$ – равносторон.) $\Rightarrow$

$\angle HAG = 30^\circ$ (по $\Sigma \angle$ в $\triangle$) $\Rightarrow HG = \frac{1}{2} AG = 3 + \frac{x}{2}$

(по св-ву прям. $\triangle$ с $\angle$ в 30°).

При этом $DG = EG = ED = x - 1$ (т.к. $\triangle EDG$ – равносторон.) $\Rightarrow$

$HD = HG - DG = 3 + \frac{x}{2} - x + 1 = 4 - \frac{x}{2}$.

Аналогично с $\triangle BFC$ получаем $CH = FH - FC = 3 + \frac{x}{2} - x = 3 - \frac{x}{2}$

$CH + HD = CD = 4 = 4 - \frac{x}{2} + 3 - \frac{x}{2} = 7 - x$

$4 = 7 - x$

$x = 3 \Rightarrow HG = 3 + 1{,}5 = 4{,}5$

По т. Пифагора $AH^2 + HG^2 = AG^2$

$AH = \sqrt{81 - 20{,}25} = \sqrt{60{,}75} = \frac{1}{2}\sqrt{243}$

Ответ: $AH = \frac{1}{2}\sqrt{243}$.

№4

Ответ: существует.

Пример: $x = 3\cdot5\cdot7\cdot9\cdot\ldots\cdot2019 - 2000$.

Д-во примера:

$x + i = 3\cdot5\cdot7\cdot9\cdot\ldots\cdot2019 + i - 2000$, где $i \in \{3, 5, \ldots, 2019\}$.

$x + i \;\vdots\; 2000 - i$, т.к. среди множителей $3\cdot5\cdot7\cdot\ldots\cdot2019$ есть число $2000 - i$ и при этом $i - 2000 = -(2000 - i)$

По св-ву делимости, если уменьшаемое и вычитаемое $\vdots$ какому-то числу, то и разность $\vdots$ этому числу $\Rightarrow$

$x + i \;\vdots\; 2000 - i$

Также заметим, что x = нечетн. − четн. = нечетн. $\Rightarrow$ $x \not\vdots$ любому четному числу $\Rightarrow$ $x + 2i \not\vdots\; 2000 - 2i$ $\Rightarrow$ т.к. среди этих высказываний ровно половина с нечетными i $\Rightarrow$ для x ровно половина высказываний верна.

ч.т.д.

№5

~~Ответ: всегда возможно это сделать. Пример действий второго: Заметим, что если мы прокуперьем в действительных чисел, то a_1~~