

هر مثلث از سه خط که همسر نیستند و هیچ کدام با هم موازی نیستند تشکیل شده است. شکل زیر از خط های تشکیل

شده است که همگی یا با خط ۱ یا با خط ۲ و یا با خط ۳

موازی هستند چون در مثلث نباید ضلع ها با هم موازی

باشند ما باید برای تشکیل مثلث از هر کدام از خط های

موازی با خط ۱ و ۲ و ۳ یک خط انتخاب کرد (فرد ۱ و ۲ و ۳

هم می توانند انتخاب شوند) و چون تعداد خطوط موازی

با خطوط ۱ و ۲ و ۳ و خطوط ۱ و ۲ و ۳ هر کدام برابر ۹ است پس تعداد مثلث ها

برابر است با:

$$(1) \quad 9 \times 9 \times 9 = 9 \times 9 \times 9 = 729$$

و طبق تعریف اگر ۳ خط با هم همسر باشند مثلثی بوجود نمی آید و تعداد آن ها

برابر با تعداد نقاط ۴ ضلعی بیی ۲ مثلث است چون فقط در نقاط ۴ ضلعی

۳ خطی که انتخاب می کنیم می توانند همسر باشند و در هر نقطه ۴ ضلعی هم می

۳ خط متمایزی است تعداد نقاط ۴ ضلعی برابر است با:

$$(2) \quad 9 = 9 + \frac{(5+8) \times 4}{2} = 9 + 2 \times 12 = 33$$

پس تعداد مثلث ها طبق قسمت ۱ و ۲ برابر است با:

$$(3) \quad 729 - 33 = 696$$



اعداد ۱۶، ۲۵، ۳۶، ۴۹، ۶۴، ۸۱
 باقی مانده بر ۳
 باقی مانده بر ۴

ثابت می کنیم هر عدد مربع کامل باقی مانده اش بر ۳ و ۴ فقط ۱ یا ۰ است
 (برپایه ۴) $n^2 = 0$ و (برپایه ۴) $n = 0$
 (برپایه ۴) $n^2 = 1$ و (برپایه ۴) $n = 1$
 (برپایه ۴) $n^2 = 0$ و (برپایه ۴) $n = 2$
 (برپایه ۴) $n^2 = 1$ و (برپایه ۴) $n = 3$
 (برپایه ۳) $n^2 = 0$ و (برپایه ۳) $n = 0$
 (برپایه ۳) $n^2 = 1$ و (برپایه ۳) $n = 1$
 (برپایه ۳) $n^2 = 1$ و (برپایه ۳) $n = 2$

اگر مربع های ۲ رقمی ما n و y و z باشند:

$$10000n^2 + 100y^2 + z^2 = 5^2$$

چون n^2 مربع کامل است و 10000 و 100 هر ۴ بخش پذیرند

و باقی مانده های آن ها بر ۳ است چون عدد مربع کامل است باید که باقی مانده ی آن بر ۳ یا ۱ باشد

و یا ۰ باشد یعنی یا ۰۰ یا ۰۱ یا ۰۴

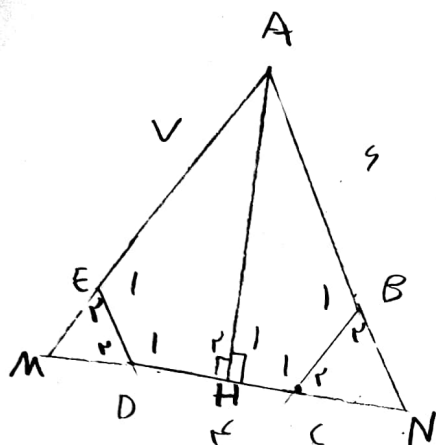
۱۶ و ۲۵ و ۳۶ و ۴۹ و ۶۴ و ۸۱

۱ ۱ ۰ ۱ ۱ ۰

$$P\left(\frac{4}{3}\right) = 4! \rightarrow \text{اگر } ۰۰۰۱$$

$$P\left(\frac{4}{1}\right) = 4 \rightarrow \text{اگر } ۰۰۰۰$$

جواب: ۴ + ۴!



مجموع زوایای Δ ضلعی برابر است با 180° چون $\hat{A} = 90^\circ$ و $\hat{B}_1 = \hat{C}_1 = \hat{D}_1 = \hat{E}_1$

در نتیجه $4\hat{H} + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow \hat{H} = 45^\circ$ پس $\hat{B}_1 = \hat{C}_1 = \hat{D}_1 = \hat{E}_1 = 45^\circ$

خطوط AE و AB و DC امتدادی دهیم تا در

نقاط m و n برخورد کنند و عمود AH بر خط DC رسم می کنیم

$$\left. \begin{array}{l} \hat{B}_1 = 45^\circ \text{ و } \hat{ABN} = 135^\circ \Rightarrow \hat{B}_2 = 45^\circ \\ \hat{C}_1 = 45^\circ \text{ و } \hat{MCN} = 135^\circ \Rightarrow \hat{C}_2 = 45^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{N} = 45^\circ \xrightarrow{\text{مثلث متساوی الساقین}} BN = CN = BC$$

$$\left. \begin{array}{l} \hat{D}_1 = 45^\circ \text{ و } \hat{NDM} = 135^\circ \Rightarrow \hat{D}_2 = 45^\circ \\ \hat{E}_1 = 45^\circ \text{ و } \hat{AEM} = 135^\circ \Rightarrow \hat{E}_2 = 45^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow \hat{M} = 45^\circ \xrightarrow{\text{مثلث متساوی الساقین}} ED = MD = ME$$

$$\left. \begin{array}{l} \hat{A} = 90^\circ \\ \hat{N} = 45^\circ \\ \hat{M} = 45^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow AN = MN = AM$$

$$\left. \begin{array}{l} AN = MN \\ BN = CN = y \\ AB = 4 \\ CD = 4 \end{array} \right\} \Rightarrow 4 + y = 4 + y + MD \Rightarrow MD = 2 \quad \left. \begin{array}{l} MD = EM \\ AM = AN \end{array} \right\} \Rightarrow y + 2 = 4 + y \Rightarrow y = 2$$

$$\left. \begin{array}{l} AN = 4 + 2 = 6 \\ \hat{H} = 90^\circ \\ \hat{N} = 45^\circ \end{array} \right\} \Rightarrow AH = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 6$$

در مثلث قائم الزاویه
ضلع مجاور به زاویه 45°
 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ وتر است



گزاره ها را n به ۲ دسته تقسیم می کنیم

دسته ی اول $(n+y)$ به z بخش پذیر باشد که z زوج هستند:

$n+2$ به ۲ بخش پذیر است و $n+4$ به ۲ بخش پذیر است و ... و $n+2.18$ به ۲ بخش پذیر است

دسته ی دوم $(n+y)$ به z بخش پذیر باشد که z فرد هستند:

$n+1$ به ۲.۱۹ بخش پذیر است و $n+3$ به ۲.۱۷ بخش پذیر است و ... و $n+2.17$ به ۳ بخش پذیر است

عدد ی مثال به نفع که فقط یا تمام گزاره های دسته ی اول با تعداد گزاره های دسته ی دوم برابر است و اگر

دسته ی دوم درست باشد مسائل حل می شود.

ثابت می کنیم عدد $(2.20 - (1 \times 3 \times 5 \times \dots \times 2.17 \times 2.19))$ همان عددی است

که می خواهیم ثابت می کنیم تمام گزاره های دسته ی اول برای این عدد نادرست و تمام

گزاره های دسته ی دوم برای این عدد درستند که در این صورت نمی از گزاره ها درستند

$$n = \text{فرد} \rightarrow \text{زوج} - \text{فرد} = n = 2.20 - (1 \times 3 \times 5 \times \dots \times 2.17 \times 2.19)$$

چون n فرد است در نتیجه $(n+y)$ هم فرد است چون در دسته ی اول:

$n+2$ به z بخش پذیر است $(z$ زوج هستند) چون $n+y$ فرد و z زوج است

همچون همیشه $n+2$ به z بخش پذیر نیست در نتیجه تمام گزاره های دسته ی اول برای این عدد درستند

$$(n+y) \text{ به } z \text{ بخش پذیر باشد (و } z \text{ فرد هستند) و } z = 2.20 - y$$

$$n = 2.20 - (1 \times 3 \times 5 \times \dots \times 2.17 \times 2.19)$$

باید ثابت کنیم: $n+y = 2.20 - y$ (و یک عدد فرد از ۱ تا ۲.۱۹ است)

$$n+y = 2.19 \times 2.17 \times \dots \times 3 \times 1 - (2.20 + y) = (2.20 - y)(k-1) \pm 2.20 - y$$

به $2.20 - y$ بخش پذیر است

پس عدد $n = 2.19 \times 2.17 \times \dots \times 3 \times 1 - 2.20$ این خاصیت را دارد



پاسخ برگ مرحله ی دوم المپیاد ریاضی فرمول وحدت ۲۰۱۸/۲۰۱۹

راه حل مساله ی ۵ :

راه حل مساله ی ۵:
 باید ثابت کنیم که دو رشته ی ۸ صریح وجود دارد که ۲۸ جواب آن
 یکسان است که در این صورت A استراتی به در دارد
 دو رشته ی ۹ و ۸ و ۷ و ۶ و ۵ و ۴ و ۳ و ۲ و ۱ و ۰ و ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و ۶ و ۷ و ۸ و ۹ که ۲۸ جواب
 یکی است