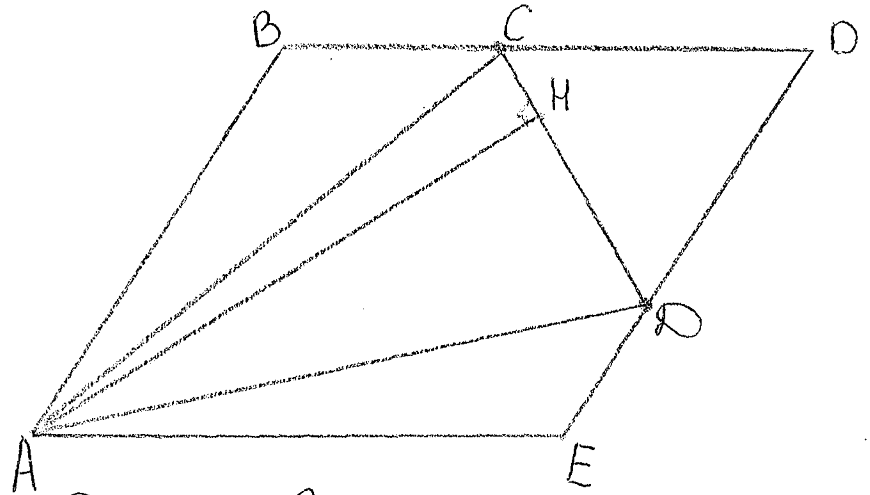
№3



Дано: $ABCDE$ - выпуклый пятиугольник, $\angle A = 60^\circ$, $\angle B = \angle C = \angle D = \angle E$, $AB = 6$, $CD = 4$, $EA = 7$

Найти: расстояние от точки A до прямой CD

Решение. Сумма углов пятиугольника равна $180^\circ \cdot (5-2) = 540^\circ$. Значит $\angle B = \angle C = \angle D = \angle E = (540^\circ - 60^\circ) : 4 = 120^\circ$.

Так как $\angle A + \angle B = 60^\circ + 120^\circ = 180^\circ$ то $AE \parallel BC$.

Так как $\angle A + \angle E = 60^\circ + 120^\circ = 180^\circ$ то $AB \parallel ED$.

Пусть O — точка пересечения прямых BC и ED.

Четырёхугольник $ABOE$ - параллелограм, $\angle O = \angle A = 60^\circ$.

Найдём $\angle OCD = 180^\circ - \angle BCD = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$.

$\angle ODE = 180^\circ - (60^\circ + 60^\circ) = 60^\circ$.

Значит, $\triangle COD$ - равносторонний.

$CO = OD = CD = 4$.

$BO = AE = 7$, $OE = AB = 6$.

$BC = BO - CO = 7 - 4 = 3$, $DE = OE - OD = 6 - 4 = 2$.

Рассмотрим $\triangle ABC$. По теореме Косинуса $AC^2 = 6^2 + 3^2 - 2 \cdot 6 \cdot 3 \cdot \cos 120^\circ = 63$. Проведём высоту AH к прямой CD.

Рассмотрим $\triangle ADE$. По теореме Косинуса $AD^2 = 7^2 + 2^2 - 2 \cdot 7 \cdot 2 \cdot (-\frac{1}{2}) = 67$.

Обозначим через x — CH, тогда HD — $(4-x)$.

Из прямоугольного треугольника ACH, $AH^2 = AC^2 - CH^2$.

Из прямоугольного треугольника ADH $AH^2 = AD^2 - HD^2$

Получим уравнение

$63 - x^2 = 67 - (4-x)^2$

$63^2 - x^2 = 67 - 16 + 8x - x^2$

$8x = 12$

$x = \frac{3}{2}$

$AH^2 = 63^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 63 - \frac{9}{4} = 60\frac{3}{4} = \frac{243}{4}$

$AH = \sqrt{\frac{243}{4}} = \frac{9\sqrt{3}}{2}$

Ответ: $\frac{9\sqrt{3}}{2}$

№4

Двузначные числа, являющиеся точными квадратами:
16, 25, 36, 49, 64, 81.

Для того чтобы получить шестизначное число, являющимся точным квадратом надо взять трёхзначное число у которого число десятков равно 0.

$$\begin{array}{r} \times\ a\,0\,b \\ a\,0\,b \\ \hline +\ ab \quad b^2 \\ a^2 \quad ab \qquad \\ \hline a^2 \quad 2ab \quad b^2 \end{array}$$

	×2		×2
$4 \cdot 4 = 16$	32	$5 \cdot 5 = 25$	50
$4 \cdot 5 = 20$	40	$5 \cdot 6 = 30$	60
$4 \cdot 6 = 24$	48	$5 \cdot 7 = 35$	70
$4 \cdot 7 = 28$	56	$5 \cdot 8 = 40$	80
$4 \cdot 8 = 32$	64	$5 \cdot 9 = 45$	90
$4 \cdot 9 = 36$	72		

	×2		×2		×2
$6 \cdot 6 = 36$	72	$7 \cdot 7 = 49$	98	$8 \cdot 8 = 64$	128
$6 \cdot 7 = 42$	84	$7 \cdot 8 = 56$	112	$8 \cdot 9 = 72$	144
$6 \cdot 8 = 48$	96	$7 \cdot 9 = 63$	126		
$6 \cdot 9 = 54$	108				

	×2
$9 \cdot 9 = 81$	162

$2ab = 64$, все остальные удвоенные произведения не дают точного квадрата.

$ab = 32$, значит $a = 4$, $b = 8$ или $a = 8$, $b = 4$

$408^2 = 166464$ $\quad$ $804 = 646416$

Ответ: 166464, 646416.

№5

Пусть каждая чисел определение по возрастанию (самое маленькое из восьми, a_1, самое большое a_8)
Самая маленькая сумма – S_1, самая большая S_{28}. Тогда $a_1 + a_2 = S_1$

$a_1 + a_3 = S_2$

$\ldots a_7 + a_8 = S_{28}$

Из полученных равенств можно определить $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8$.

Да, всегда.

№1

668