

№3

Решение

$180^\circ \cdot (n-2)$ - сумма углов n -угольника

Сумма углов пятиугольника $ABCDE$ равна:

$$180^\circ \cdot (5-2) = 180^\circ \cdot 3 = 540^\circ$$

$$\angle A = 60^\circ \Rightarrow \angle C + \angle B + \angle D + \angle E = 480^\circ$$

$$\angle C = \angle D = \angle E = \angle B \text{ (по условию)} \Rightarrow \angle C = \angle D = \angle E = \angle B = \frac{480^\circ}{4} = 120^\circ$$

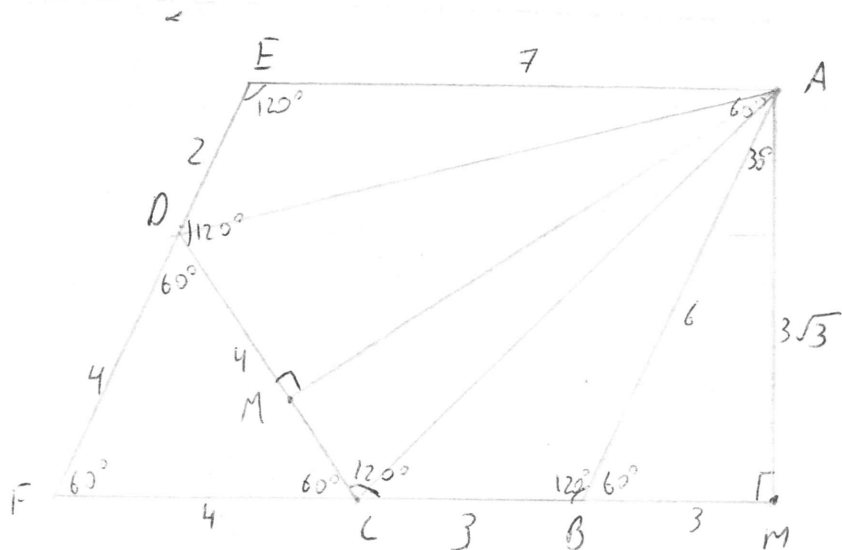
Т.к. соседние углы A и B в сумме дают $120^\circ + 60^\circ = 180^\circ$, то $AE \parallel BC$ ($\angle A$ и $\angle B$ - внутренние односторонние).

Аналогично, т.к. $\angle A + \angle E = 60^\circ + 120^\circ = 180^\circ$, то $AB \parallel DE$ ($\angle A$ и $\angle E$ - внутренние односторонние).

Продлим ED и BC до пересечения в точке F .

Получаем параллелограмм $ABFE$ (его противоположные стороны параллельны).

Значит, $ABCE$ получим путем отсечения треугольника FDC от параллелограмма $ABFE$.



Т.к. $ABFE$ - параллелограмм, его противоположные углы A и F равны.

$$\angle A = \angle F = 60^\circ$$

$\angle FCD$ является смежным с углом BCD , который равен 120° . Значит, $\angle FCD = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$

Аналогично $\angle FDC$ смежный с углом CDE , который равен 120° . $\angle FDC = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$

$\triangle FDC$ - равносторонний, значит его стороны FC , FD и CD равны

Т.к. $CD = 4$ (по условию), то $FC = FD = 4$,

$FC + CB = FB = AE$ (как противоположные стороны $ABFE$)

$$4 + CB = 7 \Rightarrow CB = 3$$

$FD + DE = FE = AB$ (как противоположные стороны $ABFE$)

$$4 + DE = 6 \Rightarrow DE = 2$$

Найдем площадь $ABFE$:

$$S_{ABFE} = FB \cdot HA$$

~~или~~ Найдем AM :

$\angle ABM$ — смежный с углом ABC .

$$\angle ABM = 180^\circ - \angle ABC = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$$

$\angle MAB = 90^\circ - \angle ABM$ (как второй острый угол $\triangle ABM$)
прям-го $\triangle$ -ка ABM)

$$\angle HAB = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$$

По св-ву катета, лежащего против угла в 30° ,

$$BM = \frac{1}{2} AB = 3$$

$$AH = \sqrt{6^2 - 3^2} \quad (\text{по теореме Пифагора})$$

$$AM = \sqrt{36 - 9} = 3\sqrt{3}$$

$$S_{ABFE} = FB \cdot AM = 7 \cdot 3\sqrt{3} = 21\sqrt{3}$$

$$S_{ABFE} = S_{FDC} + S_{ABLCDE}$$

$$S_{FDC} = \frac{1}{2} \cdot FC \cdot h_{FC} = 2 \cdot h_{FC}$$

$$h_{FC} = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3} \quad (\text{по теореме Пифагора})$$

$$S_{FDC} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$$

$$21\sqrt{3} = 4\sqrt{3} + S_{ABLCDE} \Rightarrow S_{ABLCDE} = 17\sqrt{3}$$

$$S_{ABCDE} = S_{DAC} + S_{ABC} + S_{ADE}$$

$$S_{ADE} = \frac{1}{2} \cdot AE \cdot h_{AE}$$

$$h_{AE} = AM - h_{FC} = 3\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = \sqrt{3}$$

$$S_{ADE} = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot \sqrt{3} = 3,5\sqrt{3}$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot AM = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3\sqrt{3} = 4,5\sqrt{3}$$

$$S_{ABCDE} = 17\sqrt{3} = 4,5\sqrt{3} + 3,5\sqrt{3} + S_{DAC} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_{DAC} = 9\sqrt{3}$$

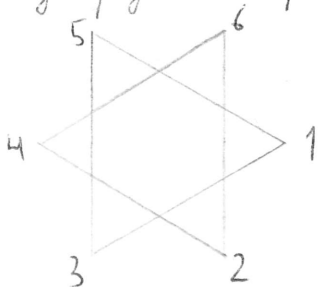
$$S_{DAC} = \frac{1}{2} \cdot CD \cdot AM = 9\sqrt{3} \Rightarrow AM = \frac{9\sqrt{3}}{\frac{1}{2} \cdot 4} = 4,5\sqrt{3}$$

Ответ: $4,5\sqrt{3}$.

№ 1

Семена

Пронумеруем вершины нашей фигуры:



Все треугольники в фигуре делятся на 2 типа: ориентированные вершиной к 1 ($\triangleright$) и ориентированные вершиной к 4 ($\triangleleft$).

Посчитаем количество первых (кол-во вторых такое же):

Наша фигура является объединением двух правильных треугольников, а их пересечением является правильный шестиугольник (в центре фигуры).

За пределами этого шестиугольника есть 10 вершин для треугольников (в правой т-ке с вершиной 1). Для каждой из них есть 3 перпендикуляров к ош 14, ~~из~~ кото-
рые могут содержать сторону треугольника.

На этих перпендикулярах есть 5, 6, 7, 8, 9, 8, 7, 6, 5 вершин соответственно. Для каждого последующего перпендикуляра число параллельных ему ~~таких же~~ перпендикуляров левее него уменьшается (~~читаем~~ ^{читаем} справа налево) от 8 до 0.

Считаем кол-во треугольников:

$$3 \cdot 10 + 5 \cdot 8 + 6 \cdot 7 + 7 \cdot 6 + 8 \cdot 5 + 9 \cdot 4 + 8 \cdot 3 +$$

$+ 7 \cdot 2 + 6 \cdot 1 + 5 \cdot 0 = 334$ - число треугольников, ориентированных вершиной к 1.

Т.к. фигура симметрична, кол-во треугольников, ориентированных вершиной к 4 также будет равно 334.

Общее число треугольников:

$$334 \cdot 2 = 668$$

Ответ: 668.

$\sqrt{2}$

Семена

Пусть ab - I число, cd - II число, ef -

III число.

$$ab = n^2$$

$$cd = k^2$$

$$ef = m^2$$

$$abcdef = t^2$$

$$abcdef = 10000 ab + 100 cd + ef = t^2$$

$$t = \sqrt{10000 ab + 100 cd + ef}$$

$10000 ab + 100 cd + ef$ можно свернуть

$$10000 \text{ ab} \neq 2(100\sqrt{cd} \cdot \sqrt{ef})$$

$$ef \neq 2(100\sqrt{ab} \cdot 10\sqrt{cd})$$

$$100cd = 2(100\sqrt{ab} \cdot \sqrt{ef}) \quad - \text{единственным вариантом для удвоенного произведения.}$$

$$cd = 2\sqrt{ab} \cdot \sqrt{ef}$$

$$cd = 16, 36, 64 \quad - \text{четыре наименьшие возможные значения}$$

1.

$$16 = 2\sqrt{ab \cdot ef}$$

$$8 = \sqrt{ab \cdot ef}$$

$$ab \cdot ef = 64$$

$\emptyset$

$$2. \quad 36 = 2\sqrt{ab \cdot ef}$$

$$18 = \sqrt{ab \cdot ef}$$

$$ab \cdot ef = 324$$

$\emptyset$

$$3. \quad 64 = 2\sqrt{ab \cdot ef}$$

$$32 = \sqrt{ab \cdot ef}$$

$$ab \cdot ef = 1024 \Leftrightarrow \begin{cases} ab = 64, ef = 16 \\ ab = 16, ef = 64 \end{cases}$$

$$\boxed{16; 64; 64}$$

$\boxed{64; 64; 16}$ — все возможные тройки двузначных чисел

Ответ: 166464 и 646416.

№5

Решение

Рассмотрим множества чисел

$(-1; -1; -1; 1; 0; 2; 2; 2)$ и $(-2; 0; 0; 0; 3; 1; 1; 1)$

Они дают одинаковый набор попарных сумм

$(-2; -2; -2; 1; -1; -1; -1; 0; 0; 0; 3; 3; 3; 1; 1; 1; 2;$

$2; 2; 4; 4; 4; 1; 1; 1; 1; 1; 1).$

Значит, второй игрок не всегда может точно определить набор исходных чисел.

Ответ: нет.

№4

Решение

Допустим, что для числа x выполняется каждое "четное" утверждение, то есть утверждение:

$$x + 2 \div 2018$$

$$x + 4 \div 2016$$

$$x + 6 \div 2014$$

...

$$x + 2018 \div 2$$

т.к. утверждение " $x+2 \div 2018$ " второе во всем списке, а " $x+2018 \div 2$ " — последнее, этих утверждений ровно половина.

1). Заметим, что число, которое прибавляется к x и число, на которое эта сумма делится в сумме дают 2020 в каждом утверждении.

Заметим в этих утверждениях самое маленькое на 2020 — <делитель>:

$$x + 2020 - 2018 \div 2018$$

$$x + 2020 - 2016 \div 2016$$

...

$$x + 2020 - 2 \div 2$$

Последнее самое маленькое делится на делитель, значит их можно брать:

$$x + 2020 \div 2018$$

$$x + 2020 \div 2016$$

...

$$x + 2020 \div 2$$

Число $x - 2020$ должно быть общим крат-

мы же числа $2, 4, 6, \dots, 2016, 2018$.

Значит, x можно записать как:
 $(2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2016 \cdot 2018) - 2020$, что является натуральным числом.

Значит, такое x существует.

Ответ: да.