

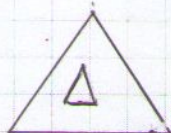
№1

Ответ: 68 треугольников.

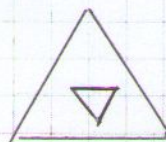
1) условно назовем длину сторо-
ны самого маленького квадра-
та единичным отрезком и бу-
дем измерять длины сторон
других треугольников именно таки-
ми ед. отр.

2) Также условно назовем большие
треугольники со ст. 12 как тре-
угольник I и треугольник II, без
потери общности,

3) Если 1 сторона треугольника парал-
лельна стороне большого тр., и дру-
гие стороны паралл. в одну сто-
рону, то назовем такой тр. соответ-
ствующим для тр I, или II.



соответствует



не соответствует

Примечание если тр. соответствует
треуг. I, то он не соответствует
треуг. II, и наоборот.

4) Теперь подсчитаем кол-во соотв. треу-

м (продолжение)

таблицы для трещ. I. Для
трещ. II кол-во будет такое
же (из п. 3))

Длина
стороны

~~стороны~~
кол-во соотв.
треугольников;

1	60
2	57
3	52
4	45
5	36
6	28
7	21
8	15
9	10
10	6
11	3
12	1

$$60 + 57 + 52 + 45 + 36 + 28 + 21 + 15 + 10 + 6 + 3 + 1 = 334,$$

$334 \cdot 2 = 668$ треугольников.

12

a^2 - двузначное, $a \in \mathbb{N}$

b^2 - двузначное, $b \in \mathbb{N}$

c^2 - двузначное, $c \in \mathbb{N}$

Лемма 1. $4 \leq a, b, c \leq 9$.

Рассмотрим для a (для b и c аналогично):

Если $a < 4$, то $a^2 < 16$, а т.к. $a \in \mathbb{N}$, то

$a^2 \leq 9$ - не двузн.

Если $a > 9$, то $a^2 > 81$, т.к. $a \in \mathbb{N}$, то

$a^2 \geq 100$ - не двузн.

2) Рассмотрим все числа вида:

$$X = \overline{x_1 0 x_2}$$

$$X^2 = \begin{array}{r} \times \overline{x_1 0 x_2} \\ \hline \overline{x_1 0 x_2} \\ \hline \begin{array}{|c|c|c|} \hline x_1 \cdot x_2 & x_1 \cdot 0 & 0 \cdot x_2 \\ \hline \end{array} \\ \hline \begin{array}{|c|c|c|} \hline x_1 \cdot x_2 \cdot 10 & x_1 \cdot x_2 & 0 \cdot x_2 \\ \hline \end{array} \end{array}$$

2 цифры 2 цифры 2 цифры

, где e - возможный
переход из пред-
ыдущего разряда.

Нужно избежать появления e , т.к.
 $x_1 \cdot x_1 + e$ - не ~~натуральный~~ точный квадрат,
т.к. $x_1 \in \mathbb{N}$, $e \leq 2$.

Тогда нужно добиться, чтобы

$x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_2$ - точный квадрат.

$2x_1x_2 = d^2$. Без потери общности

$x_2 > x_1$ (если $x_2 = x_1$, то $2x_1^2$ - не
точный квадрат)

минимальных

и т.к. $4 \leq x_1, x_2 \leq 9$, и $x_2 > x_1$,

то $\frac{x_2}{x_1} = 2, x_2 = 2x_1$

В таком случае:

$$2x_2 x_1 = (2x_1)^2$$

3) Это могут быть:

1 и 2

2 и 4

3 и 6

4 и 8

5 и 10

6 и 12

7 и 14

8 и 16

9 и 18

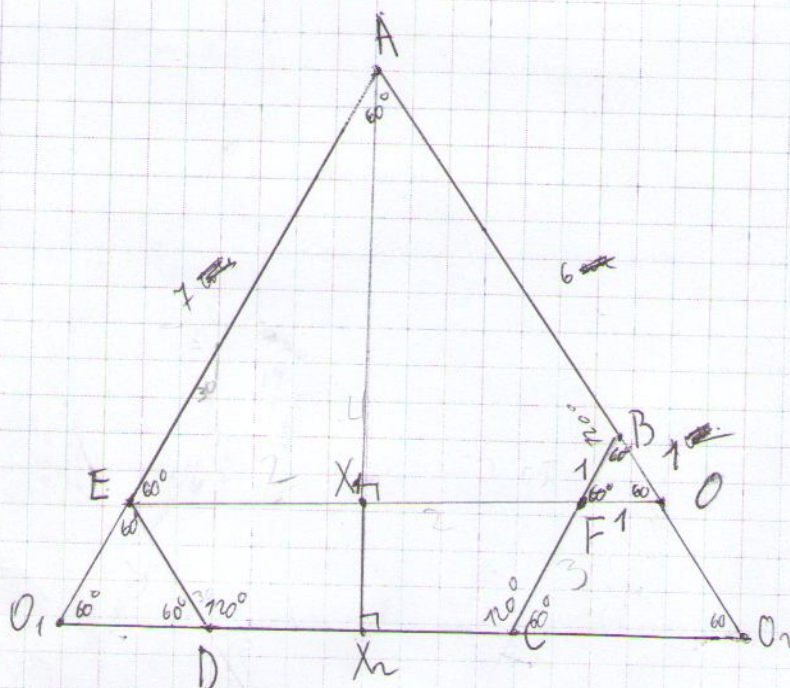
По лемме 1 подходит вариант
4 и 8.

$$108^2 = 16\ 64\ 64, a^2=16, b^2=64, c^2=64$$

$$804^2 = 64\ 64\ 16, a^2=64, b^2=64, c^2=16$$

удовлетворяет условию.

Ответ: 166464, 646416.



1) Проведем $BO = 1$ на прод. AB .
Тогда $\triangle EAO$ - равнобедр., EO - основа
и $\angle AEO = \angle AOE = (180^\circ - 60^\circ) : 2 = 60^\circ$
 $\triangle EAO$ - равносторонний.

2) Сумма углов в n -угольнике
равна $(n-2) \cdot 180^\circ$.

В данном случае $n=5$, $(n-2) \cdot 180^\circ =$
 $= 540^\circ$

по усл. $\angle AED = \angle EDC = \angle DCB = \angle CBA =$
 $= (540^\circ - \angle EAO) : 4 = (540^\circ - 60^\circ) : 4 = 120^\circ$.

3) $\angle FBO = 180^\circ - \angle FBA = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$, т.к.
смежные $\Rightarrow$ угол $\angle OFB = 180^\circ - 60^\circ - 60^\circ =$
 $= 60^\circ$, т.к. сумма углов в тр. равна 180°
и $\triangle OFB$ - равносторонний.

№3 (продолжение)

4) $\angle EFC = \angle BFO = 60^\circ$, как ~~наклад~~
противоп.

$\angle EFB = 180^\circ - \angle BFO = 120^\circ$, как
смежные.

$\angle DEF = \angle DEA - \angle AEF = 60^\circ$

5) Сумма внутр. углов $\angle CDE$ и
 $\angle DEF$ равна $180^\circ \Rightarrow EF \parallel CD$.

6) Проведем $AX_1 \perp EF$. Проведем x_1, x_2
продолжение AX_1 к DC . т.к. $AX_1 \perp EF$,
то $AX_2 \perp CD$. AX_2 — исконое рас-
стояние.

7) В трап. $EDCF$ углы при осн.
 DC равны $\Rightarrow$ она равнобедренная, $ED = CF$.
Пусть $ED = L$

8) ~~Продолжим~~ O_1 — т. пересеч. продолжк.,
сторон AE и DC , $\angle O_1DE = 180^\circ - \angle EDC =$
 $= 60^\circ$, т.к. смежные. $\angle O_1ED = 180^\circ - \angle DEA =$
 $= 60^\circ$, т.к. смежные. $\angle EO_1D = 180^\circ - 60^\circ - 60^\circ$
 $= 60^\circ \Rightarrow \triangle O_1ED$ — равност. $O_1E = O_1D = ED = L$.

9) O_2 — точка пересеч. продолжк. сторон
 AB и DC .

$\angle BCO_2 = 180^\circ - \angle DCB = 60^\circ$, т.к. смежные.

$\angle BO_2C = 180^\circ - \angle BCO_2 - \angle CBO_2 = 60^\circ$, т.к.
сумма углов в тр. равна 180° .

из (продолжение)

треугольник CB_1O_2 - равно-
сторонний.

$$B_1O_2 = B_1C = CO_2 = CF + 1 = L + 1,$$

На № _____ № _____
10) В AO_1O_2 - равностор., т.к. по
условиям углы равны 60° .

$$AO_1 = 7 + L$$

$$AO_2 = 6 + 1 + L$$

$$O_1O_2 = L + 4 + L + 1 = 2L + 5$$

$$AO_1 = O_1O_2 = 7 + L = 2L + 5$$

$$2 + L = 2L$$

$$2 = L$$

11) В равност. тр $\triangle AO_1O_2$ высота AX_2 -
еще биссектр. и медиана, тогда

$$O_1X_2 = \frac{1}{2} O_1O_2 = \frac{1}{2} \cdot 9 = 4,5.$$

12) Имеем прямоугол. тр. $\triangle AO_1X_2$, $\angle O_1XA_2 = 90^\circ$, O_1A - гипотенуза

по теореме Пифагора $X_2A =$

$$= \sqrt{O_1A^2 - (O_1X_2)^2} = \sqrt{81 - 4,5^2} = \sqrt{81 - 20,25} =$$

$$= \sqrt{60,75}$$

Ответ: расстояние от т. А до
прямой CD равно $\sqrt{60,75}$.

№4

Ответ: нет, не существует.
Изобразим все утверждения
на пары:

$$(x+3; 2017) \text{ и } (x+2017; 3) \\ (x+2; 2018) \text{ и } (x+2018; 2)$$

...

А также пару:

$$(x+1; 2019) \text{ и } (x+1010; 1010)$$

В каждой паре, если 1 утверждение верно - то другое верно.
В каждой паре верно по 1 утверждению, но такое невозможно.

№5

Ответ: нет, не всегда.
Рассмотрим 2 набора
чисел и вычислим все
28 сумм для каждого
набора.

1) $-1; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 0; 1$.

Суммы:

$-1, -1, -1, -1, -1, -1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 0,$
 $0, 1, 0, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 1, 1.$

Имеем: 6 сумм равных -1 ; 6 сумм
равных 1 ; 16 сумм равных 0 .

2) $-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}$.

Суммы:

$-1, -1, -1, 0, 0, 0, 0, -1, -1, 0, 0, 0, 0,$
 $-1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1,$
 $1.$

Имеем: 6 сумм равных -1 ; 6 сумм равных
 1 ; 16 сумм равных 0 .

Тот же набор сумм, что и в случае 1).
Получается, что набор сумм не
определяется однозначно никаким
набором чисел, поэтому второй ил-
люстрация не всегда сможет это сделать.