2.

Так как $\overline{ab} = x^2$; то x - однозначное и $4 \leq x \leq 9$, где $x \in N$.

Следовательно, $\overline{ab} = 16$, $\overline{ab} = 25$, $\overline{ab} = 36$, $\overline{ab} = 49$, $\overline{ab} = 64$, $\overline{ab} = 81$.

Из этих чисел „склеить" одно шестизначное число, то оно тоже является квадратом натурального числа.

„Склеим", подставив на первое место

1) $\overline{16\underbrace{\ldots\ldots}} = (400 + a)^2 = 160000 + 800a + a^2$, где a - однозначное и $4 \leq a \leq 9$, $a \in N$

Подходит только $a = 8$, т.к $(400 + 8)^2 = 160000 + 6400 + 64 = 166464$.

2) Подставим на первое место $\overline{25\underbrace{\ldots\ldots}} = (500 + b)^2 = 250000 + 1000b + b^2$, где $4 \leq b \leq 9$, $b \in N$ ни одно b не удовлетворяет.

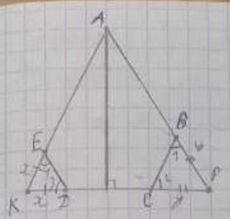
3) Поставим на первое место $\overline{36\underbrace{\ldots\ldots}} = (600 + c)^2 = 360000 + 1200c + c^2$, где c $4 \leq c \leq 8$, $c \in N$. Ни одно c не удовлетворяет

4) Аналогично, $\overline{49\ldots\ldots} = (700 + d)^2 =$
$= 490000 + 1400d + d^2$, где $4 \leq d \leq 7$,
$d \in N$, ни одно d не удовлетворяет условию

5) $\overline{64\ldots\ldots} = (800 + e)^2 = 640000 +$
$+ 1600e + e^2$, где $4 \leq e \leq 6$, $e \in N$.
Подходит только $e = 4$, т.к. $(800 + 4)^2 =$
$= 640000 + 6400 + 16 = 646416$.

6) $\overline{81\ldots\ldots} = (900 + t)^2 = 810000 +$
$+ 1800t + t^2$, где $4 \leq t \leq 5$, $t \in N$.
Ни одно t не удовлетворяет условию..

Ответ: 166464; 646416.



3. Дано

$ABCDE$ – выпуклый 5-угольник

$\angle A = 60^\circ$, $\angle B = \angle C = \angle D = \angle E = 120^\circ$

$AB = 6$, $CD = 4$, $EA = 7$

Найти: расст. от A до DC

Доп. постр.:

Продолжим стороны AB и AE до пересечения с прямой DC. $AB \cap DC = P$, $AE \cap DC = K$. Получим $\triangle AKP$

Решение.

1) Т.к. по условию $\angle B = \angle C = \angle D = \angle E = 120^\circ$, то смежные им углы равны 60°, т.е. $\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = \angle 4 = 60^\circ$.

2) В $\triangle BCP$ и $\triangle KED$ по два угла равных 60°, тогда $\angle P = \angle K = 60^\circ$ (по Т. о сумме углов треугольника) $\Rightarrow$ $\triangle KED$ и $\triangle BCP$ – равносторонние. Пусть $KD = x$, $CP = y$. (*)

3) В $\triangle AKP$ $\angle A = \angle K = \angle P = 60^\circ$, значит $\triangle AKP$ – равносторонний, тогда $AK = AP = KP$. Используя условия и $(*)$, получаем равенства:

(1) $z + 2 = x + y + 4 \Rightarrow y = 3$

2) $x + y + 4 = 6 + y \Rightarrow x = 2$

Следовательно $AK = AP = KP = 9$

4) Т.к. $\triangle AKP$ – равносторонний, то высота является и медианой и $AH = \frac{1}{2}KP = \frac{9}{2} = 4{,}5$.

5) Из $\triangle AKH$, где $\angle H = 90^\circ$, по Т. Пифагора найдем AH: $AK^2 = KH^2 + AH^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow AH = \sqrt{9^2 - \left(\frac{9}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{9^2 \cdot 4 - 9^2}{4}} = \sqrt{\frac{9^2 \cdot (4-1)}{4}} = \frac{9\sqrt{3}}{2}$$

$AH \perp DC$ и есть искомое расстояние

Ответ: $\frac{9\sqrt{3}}{2}$.

4.

По условию $(x+1) \vdots 2019$, $(x+2) \vdots 2018$, … $(x+2017) \vdots 3$, $(x+2018) \vdots 2$.

Всего утверждений 2018, половина из которых – 1009, должны быть верными.

Заметим, что к x последовательно прибавляются 1009 нечетных чисел от 1 до 2017 и столько же четных ~~от~~ от 2 до 2018. И нужно рассмотреть кратность последовательным числам: 2, 3 …, 2018, 2019

Если за x принять число

$x = \underline{2019 \cdot 2017 \cdot 2015 \cdot \ldots \cdot 3 - 2020}$, то x – нечётное число

Рассмотрим 2 случая

1) $(x + 2k) \vdots (2020 - 2k)$ – ложно, т.к. неч $\not\vdots$ четному, $k \in N$

2) $(x + (2k-1)) \vdots (2020 - (2k-1))$. – верно при любом $k \in N$, т.к.

$2019 \cdot 2017 \cdot \ldots \cdot 3 - 2020 + (2k-1) =$

$= 2019 \cdot 2017 \cdot \ldots \cdot 3 - (2020 - (2k-1))$

Число, вида $(2020-(2k-1))$ является делителем как и уменьшаемого, так и вычитаемого, т.е числа x.

Ответ: да, существует.

5.

Первому игроку, чтобы выиграть нужно подобрать два набора из 8 чисел так, чтобы их попарные суммы совпадали, тогда второй не сможет их однозначно определить

1 набор: 1 1 1 2 3 4 4 4

2 набор: 0 2 2 2 3 3 3 5

Которые дают одинаковое множество всевозможных попарных сумм:

Суммы первого набора:

```
2 2 3 4 5 5 5
  2 3 4 5 5 5
    3 4 5 5 5
      5 6 6 6
        7 7 7
          8 8
            8
```

Суммы второго набора:

```
2 2 2 3 3 3 5
  4 4 5 5 5 7
    4 5 5 5 7
      5 5 5 7
        6 6 8
          6 8
            8
```

Данный пример показывает, что не всегда.

Ответ: нет, не всегда.

1.

Для каждого отрезка, разделенного на n - единичных отрезков, можно построить как на основания $\frac{n(n+1)}{2}$ треугольников в одну сторону

т.к. одиночных отрезков будет n, отрезков длиной в две единицы будет (n - 1) ... отрезков длиной K будет (n - K + 1). Итого $1+2+...+n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Итого: $2 \cdot \left(\frac{4 \cdot 5}{2} + \frac{5 \cdot 6}{2} + \ldots + \frac{12 \cdot 13}{2} \right) = 708$.

Ответ: 708 треугольников