

Шифр

М-075

1	2	3	4	5	Итог

1. Пусть x — количество грамм сыра, которое лиса съела у I вороны. Тогда I вороне досталось ^{съест} $100 - x$ грамм сыра. По условию у II вороны было сыра вдвое больше, чем у I в. и лиса съела втрое больше сыра, чем у I в. $\Rightarrow$ у II в 200 г сыра было.

По условию у II вороны съела в 2 раза меньше, чем I в. $\Rightarrow$ II в. съела $\frac{100 - x}{2} = 50 - \frac{x}{2}$ г сыра. По условию лиса съела у II в. в 3 раза больше сыра, чем у I в. $\Rightarrow$, то есть $3x$ грамм.

$$\text{Значит } 200 \text{ г} = (50 - \frac{x}{2}) + 3x.$$

$$200 - (50 - \frac{x}{2}) + 3x \Rightarrow 200 = 50 + 2,5x \quad \neq 50$$

$$150 = 2,5x \quad \Rightarrow x = 60$$

А лиса всего съела сыра $x + 3x = 4x = 240$ (г).

Ответ: 240 грамм.

4. Пусть a^2, b^2 и c^2 — числа
написанные тремя учениками, а $d_1 d_2 d_3 d_4 d_5 d_6$ —
6-значное число, которое нужно найти.
Значит $d_1 d_2 = a^2, d_3 d_4 = b^2, d_5 d_6 = c^2 \Rightarrow 10000 a^2 +$
 $+ 100 b^2 + c^2 = d_1 d_2 d_3 d_4 d_5 d_6$.

Поскольку a^2, b^2 и c^2 — ~~2-значные~~ 2-значные
числа, $100 > \{a^2, b^2, c^2\} > 9 \Rightarrow 9 \geq \{a, b, c\} \geq 4$.

Пусть $d_1 d_2 d_3 d_4 d_5 d_6 = x^2$ (по условию).

$d_1 d_2 = a^2 \Rightarrow x \geq 100a$ (если $x < 100a$, то $x^2 < 10000a^2$,
значит $d_1 d_2 < a^2$) $\Rightarrow$ если $x \geq 100a + 10$, то
 $x^2 \geq (100a + 10)^2 = 10000a^2 + 2000a + 100$

$$10000a^2 + 100b^2 + c^2 \geq 10000a^2 + 2000a + 100 \quad | -10000a^2$$

$$100b^2 + c^2 \geq 2000a + 100$$

При $a \geq 5, 2000a \geq 10000 \Rightarrow$

$$10000a^2 + 100b^2 + c^2 \geq 10000a^2 + 2200a + 100 \quad | -10000a^2$$

$$100b^2 + c^2 \geq 2200a + 100$$

$$\text{Но } 100b^2 \leq 2200 \cdot 4 = 8800 \leq 2200a$$

$$c^2 < 100 \Rightarrow 100b^2 + c^2 \leq 2200a + 100$$

Противоречие. $\Rightarrow x \leq 100a + 9$.

Если $x = 100a + 10$, то $x^2 : 10^2 = 100 \Rightarrow$ оканчивается
на 2 нуля, но тогда $c^2 = 0 \Rightarrow c = 0$, но $c \geq 4$.

Значит $100a \leq x \leq 100a + 9 \Rightarrow x = 100a + z =$
 $= \overline{a0z} \quad (z = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}) \Rightarrow x^2 = \overline{a0z^2} =$

$$= (100a + z)^2 = 10000a^2 + 200az + z^2 \Rightarrow x^2 \text{ оканчи-}$$

$$\text{вается на } z^2 \Rightarrow z^2 = c^2 \Rightarrow z = c.$$

$$\text{Значит } x^2 = 10000a^2 + 200ac + c^2$$

Стр 3 из 5

$$\text{и } x^2 = 10000a^2 + 100b^2 + c^2 \Rightarrow 10000a^2 + 200ac + c^2 = 10000a^2 + 100b^2 + c^2 \quad | -10000a^2 - c^2$$

$$\Rightarrow 200ac = 100b^2 \quad | :100 \Rightarrow 2ac = b^2 \Rightarrow b^2 : 2 \Rightarrow \Rightarrow b = \{4, 6, 8\}.$$

$$\text{Если } b=4, a \geq 4 \text{ и } c \geq 4 \Rightarrow 2ac \geq 2 \cdot 4^2 = 32, \text{ но } b^2 = 16.$$

$$\text{Значит } b = \{6, 8\}.$$

$$\text{Если } b=6, \overset{\text{по}}{b^2} = 36 = 36 \Rightarrow ac = \frac{36}{2} = 18 = 1 \cdot 18 = 2 \cdot 9 = 3 \cdot 6, \text{ но } a \geq 4 \text{ и } c \geq 4 \Rightarrow b \neq 6.$$

$$\text{Значит } b=8. \Rightarrow b^2 = 64 = 2ac \Rightarrow ac = 32 = 1 \cdot 32 = 2 \cdot 16 = 4 \cdot 8. \text{ Поэтому } a \text{ и } c \text{ равно } 4 \text{ и } 8.$$

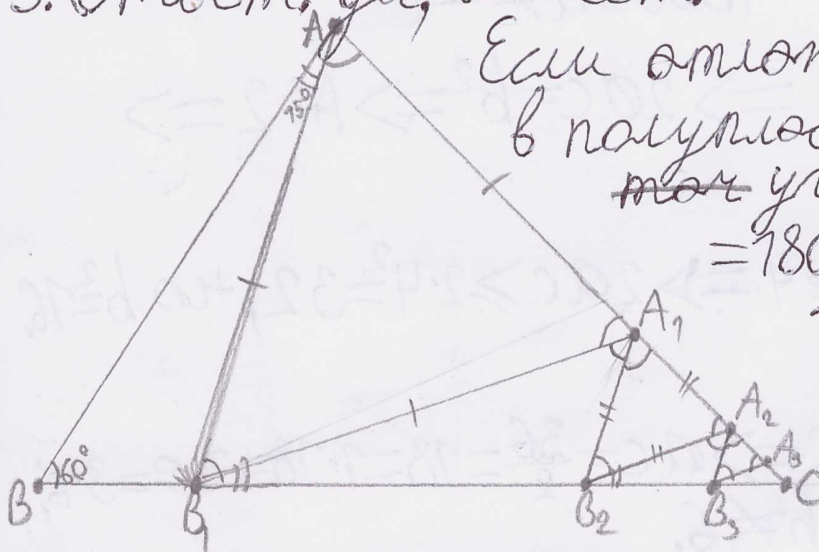
$$\text{Значит Если } a=4, \overset{\text{по}}{b}=8 \text{ и } c=8 \Rightarrow d_1 d_2 = 16, d_3 d_4 = 64, d_5 d_6 = 64 \Rightarrow d_1 d_2 d_3 d_4 d_5 d_6 = 166464 = x^2 \Rightarrow x = 408 (408^2 = (400+8)^2 = 160000 + 6400 + 64 = 166464).$$

$$\text{Если } a=8, \text{ то } b=8 \text{ и } c=4 \Rightarrow d_1 d_2 = 64, d_3 d_4 = 64, d_5 d_6 = 16 \Rightarrow d_1 d_2 d_3 d_4 d_5 d_6 = 646416 = x^2 \Rightarrow x = 804 (804^2 = (800+4)^2 = 640000 + 6400 + 16 = 646416).$$

Я разобрал все варианты и покажу, что других нет.

Ответ: 166464 и 646416.

3. Ответ: да, может.



Если отложить от луча AB в полуплоскости с точкой C ~~точ~~ угол в 15° , то $\angle BB_1A = 180^\circ - 60^\circ - 15^\circ = 105^\circ$.

$$180^\circ = 60^\circ + 15^\circ + \angle BB_1A = 60^\circ + \angle BB_1A + \angle A_1B_1C$$

$$\hookrightarrow \angle A_1B_1C = \angle BAB_1 = 15^\circ$$

$\angle B_1AC = 180^\circ - 60^\circ - 45^\circ - 15^\circ = 60^\circ$ и $\angle AB_1A_1 = 60^\circ \Rightarrow \angle B_1A_1A = 60^\circ$. По условию $60^\circ = \angle AB_1A_1 = \angle B_1A_1B_2 = \angle A_1B_2A_2 = \dots = \angle B_nA_nB_{n+1} = \angle A_nB_{n+1}A_{n+1} \Rightarrow$ прямые $AB_1, A_1B_2, A_2B_3, \dots, A_nB_{n+1}$ параллельны по равным внутренним накрест лежащим углам. И прямые $B_1A_1, B_2A_2, \dots, B_nA_n, B_{n+1}A_{n+1}$ тоже $\parallel$ по тем же углам в 60° .

Значит $\angle A_1B_1C = \angle A_2B_2C = \angle A_3B_3C = \dots = \angle A_{n+1}B_{n+1}C = 15^\circ$ как соответствующие углы при пересечении $\parallel$ прямых секущей. $\Rightarrow$ в $\triangle A_nB_nC$ $\angle A_nB_nC = 15^\circ$, $\angle A_nCB_n = 45^\circ \Rightarrow A_nB_n > A_nC$ по теореме. Против большего угла в $\triangle$ лежит большая сторона. $\triangle A_nB_{n+1}A_{n+1}$ — равнобедренный $\Rightarrow B_{n+1}A_{n+1} = A_{n+1}A_n$ и $B_{n+1}A_{n+1} > A_{n+1}C \Rightarrow A_nA_{n+1} > A_{n+1}C \Rightarrow$ либо A_nC будет меньше $0,5$ м $\Rightarrow$ ~~тогда~~ $A_nC > 4,95$ м $\Rightarrow$ луча параллельна $> 4,95 \cdot 2 = 9,9$ (м), ТАК КАК $\triangle A_nB_{n+1}A_{n+1}$ — РАВНОСТОРОННИЙ, $A_nB_{n+1} + B_{n+1}A_{n+1} = 2A_nA_{n+1}$, $AB_1A_1B_2A_2 \dots B_nA_nB_{n+1}A_{n+1} = 2A_nA_{n+1}$.

5. Ответ: да, существует.

Пример: $x = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot \dots \cdot 2017 \cdot 2019 - 2020$.

Верные утверждения: $x + H \vdots (2020 - H)$,

H — нечётное большее 0 и меньшее 2020.

$$x + H = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot 2019 - (2020 - H)$$

$$2020 - H = \{1, 3, 5, \dots, 2019\} \Rightarrow x + H =$$

$$\Rightarrow 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot 2019 - (2020 - H) \vdots 2020 - H.$$

Неверные утверждения: $x + 4 \vdots (2020 - 4)$

4 — чётное большее 0 и меньшее 2020.

$$x + 4 = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot 2019 - (2020 - 4)$$

$$2020 - 4 = \{2, 4, 6, \dots, 2018\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot 2019 - (2020 - 4) \not\vdots 2020 - 4.$$

2. Ответ: кельзи.

Пример на 5:

