

~ 1

Пусть ворона массой x кг у первой вороны. Тогда первой досталось $100 - x$ кг, а второй $2 \cdot 100 - 3x$ кг. Тогда второй досталось в два раза меньше, значит $(2 \cdot 100 - 3x) \cdot 2 = 100 - x$

$$400 - 6x = 100 - x$$

$$300 = 5x$$

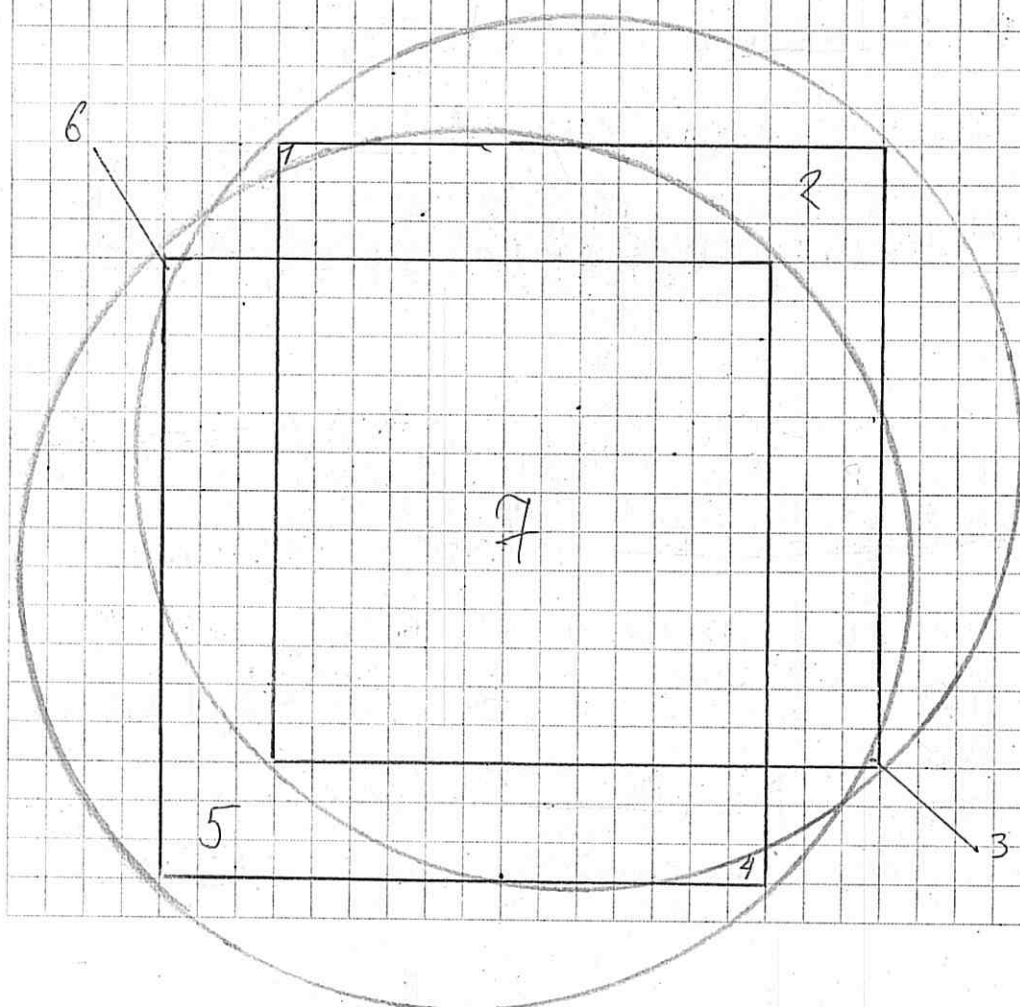
$$x = 60$$

Массе досталось $x + 3x = 4x = 4 \cdot 60 = 240$ кг сыра

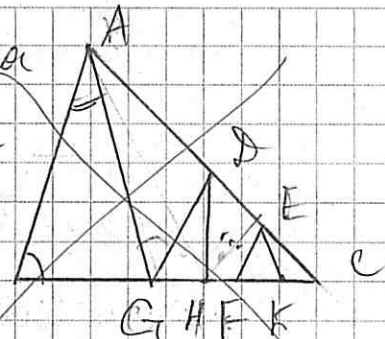
Ответ: 240 кг.

~ 2

Да. Можно



из ΔA , можем. Пусть точка
выделяем из угла
 60° в ΔB . Это возможно



м.к. $\angle A = 180^\circ - \angle B - \angle C =$
 $= 180^\circ - 45^\circ - 60^\circ = 75^\circ > 60^\circ$. Тогда $\angle B$ $AG = 60^\circ \Rightarrow$
 $\Rightarrow \angle AGB = 180^\circ - \angle CBG - \angle ABG = 60^\circ \Rightarrow$
 $\Rightarrow \Delta ABC = \Delta ABG = \Delta AGC$. $\angle AGC = 60^\circ$ (по ус-
 ловию) $\Rightarrow \angle DGC = 180^\circ - \angle AGB - \angle AGD = 60^\circ$.
 $\angle GDN = 60^\circ$ (по условию) $\Rightarrow \angle GND = 180^\circ - \angle HGN$
 $\Rightarrow \angle GDN - \angle GHN = 60^\circ$. У.м.д.р. Рассмотрим

симметрично - то точку E на стороне
произвольную точку F на AC, в ко-
торой останавливаемся точка.

$EF = EK = FK$, $\angle FEK = \angle EKF = \angle EFK = 60^\circ$. (Точка
доказана.) Пусть $\angle C = \angle C$, $\angle EFC = \angle ABC \Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta ABC$ и ΔEFC - подобные $\Rightarrow \frac{FC}{BC} = \frac{EF}{AB} \Rightarrow$

$$\Rightarrow EF = \frac{FC \cdot AB}{BC} \Rightarrow KC = FC - FK = FC - EF = FC - \frac{FC \cdot AB}{BC} =$$

$$= FC \left(\frac{BC - AB}{BC} \right) \text{ Каждый раз, когда точка}$$

касается BC Рассмотрим
изменение расстояния от точки до
C во время касания BC. Это было
FC стало $\frac{BC - AB}{BC} FC \Rightarrow$ во время касания
BC расстояние равно $BG \cdot \left(\frac{BC - AB}{BC} \right)^{i-1}$

$$\angle ACB = \angle BAC = 75^\circ > 60^\circ = \angle ABC \Rightarrow AB$$

$$\angle BAC = 75^\circ > 45^\circ = \angle ACB \Rightarrow AB < BC \Rightarrow BC - AB > 0$$

$$BC - AB \cdot BC - AB < 1 \Rightarrow 0 < \frac{BC - AB}{BC} < 1 \Rightarrow \text{Число } i \rightarrow \infty$$

$$\frac{BC - AB}{BC} \rightarrow 0. \left(\frac{BC - AB}{BC} \right)^{i-1} \text{ может быть сколь}$$

угодно мало, но $\left(\frac{BC - AB}{BC} \right)^{i-1} > 0$. Тогда суще-
 ствует такое i при котором $\left(\frac{BC - AB}{BC} \right)^{i-1} \cdot BC <$

$< 0,1 \Rightarrow \exists K: KC < 0,1$. Рассмотрим эту
 точку K , $\angle ABC = 60^\circ < 75^\circ < 75^\circ = \angle BAC = BC > AC \Rightarrow$
 $\Rightarrow BC > 5$

Да. может. И пусть пусть
 мыка будем

ног угла $60^\circ \angle AC$

$\Rightarrow \angle A_1 A C = 60^\circ$. $\angle A A_1 A_2 = 60^\circ \Rightarrow A_1$

$\Rightarrow \angle A A_2 A_1 = 60^\circ$. Докажем по индукции,

что $A_1 A_2 A_3 \dots A_{2k+2} A_{2k+3} A_{2k+4}$ - равнове-
 ственный. Поша $\Delta A_1 A_2$. Переход:

Пусть $\Delta A_{2k} A_{2k+1} A_{2k+2}$ - равносторонний, тогда

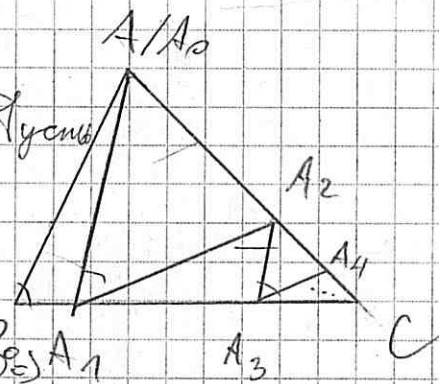
$$\angle A_{2k} A_{2k+2} A_{2k+1} = 60^\circ \angle A_{2k+1} A_{2k+2} A_{2k+3} = 60^\circ (\text{по условию}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle A_{2k+3} A_{2k+2} A_{2k+4} = 60^\circ \angle A_{2k+2} A_{2k+3} A_{2k+4} = 60^\circ (\text{по усло-}$$

вию) $\Rightarrow \Delta A_{2k+2} A_{2k+3} A_{2k+4}$ - равносторонний.

Рассмотрим по произвольной точке

$$A_{2k}. \angle C = \angle C, \angle A_1 A_0 A_2 = \angle A_{2k+1} A_{2k} A_{2k+2} = 60^\circ \Rightarrow$$



$$A_0 A_1 C \text{ и } A_{2k} A_{2k+1} \frac{C}{A_{2k+2}} - \text{ногабине} \Rightarrow \frac{A_{2k} C}{A C} =$$

$$= \frac{A_{2k} A_{2k+1}}{A_0 A_1} \Rightarrow A_{2k} A_{2k+1} = \frac{A_{2k} C \cdot A_0 A_1}{A C} \quad A_{2k} \neq A_{2k+1}$$

$$\begin{aligned} A_{2k} A_{2k+1} &= A_{2k} A_{2k+2} \quad A_{2k+2} C = A_{2k} C - A_{2k} A_{2k+2} = \\ &= A_{2k} C - A_{2k} A_{2k+1} = A_{2k} C - \frac{A_{2k} C \cdot A_0 A_1}{A C} = \\ &= A_{2k} C \left(1 - \frac{A_0 A_1}{A C} \right) \end{aligned}$$

Докладуем по индукции, что $A_{2k} C =$
 $= A_0 C \cdot \left(\frac{A C - A_0 A_1}{A C} \right)^k$ Тогда при $k=0$ $A_0 C \cdot \left(\frac{A C - A_0 A_1}{A C} \right)^0 =$
 $= A_0 C = A_{2 \cdot 0} C$ Проверим: Пусть $A_{2k} C = A_0 C \times$
 $\times \left(\frac{A C - A_0 A_1}{A C} \right)^k$ $A_{2k+2} C = A_{2k} C \cdot \left(\frac{A C - A_0 A_1}{A C} \right) = A_{2k} \cdot A_0 C \times$
 $\times \left(\frac{A C - A_0 A_1}{A C} \right)^{k+1}$

$$\angle A A_1 C = 180^\circ - \angle A_1 A C - \angle A C A_1 = 75^\circ > 45^\circ = \angle C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AC > A_0 A_1 \Rightarrow \frac{A C - A_0 A_1}{A C} > 0 \quad \text{и} \quad \frac{A C - A_0 A_1}{A C} < 1 \Rightarrow \left[\frac{A C - A_0 A_1}{A C} \right]^k < \frac{0.05}{\frac{A C - A_0 A_1}{A C}} \quad \text{Поскольку}$$

$$\text{выберем } k. \quad A_{2k} C = \left(\frac{A C - A_0 A_1}{A C} \right)^k \cdot A C < 0.05 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_0 A_{2k} = A C - A_{2k} C > 0.95 \quad A_0 A_1 = A_1 A_2 = A_0 A_1 + A_1 A_2 =$$

$$= A_{2k} A_{2k+1} = A_{2k+1} A_{2k+2} = A_{2k} A_{2k+1} \Rightarrow A_{2k} A_{2k+1} \neq A_{2k+1} A_{2k+2}$$

$= 2A_{2k} A_{2k+2} \overset{9,9}{2} A_0 A_{2k} = 2(A_0 A_2 + A_2 A_4 + \dots + A_{2k-2} A_{2k}) =$
 $= A_0 A_1 + A_1 A_2 + A_2 A_3 + A_3 A_4 + \dots + A_{2k-2} A_{2k-1} + A_{2k-1} A_{2k}.$
 $A_0 A_1 + A_1 A_2 + \dots + A_{2k-1} A_{2k} \geq 9,9$ Это и есть
 (А0А1+А1А2+...+А2к-1А2к - длина пути)
 мушкет. значит значения при взятых к
 длина пути мушкет больше 9,9.

~ 5. Да существует. Пусть a - произведение
 всех нечётных чисел от 1 до ~~2019~~
 2019. Тогда $a:3, a:5, \dots, a:2019, x \equiv a-2020$
 проходит. $a \not\equiv 2$, т.к. a - произведение
 нечётных чисел. рассмотрим
 все высказывания ~~а~~ а вида:
 $(x+2k): (2020-2k)$ Тогда $x+2k = a \pm 2020 + 2k$ $a \not\equiv 2$
 $2020:2 \quad 2k:2 \Rightarrow (a - 2020 + 2k):2 \quad (2020-2k):2 \Rightarrow$
 $\Rightarrow (a - 2020 + 2k) \not\equiv (2020-2k)$. Значит все
 эти высказывания не верны. Рассмотрим
 остальные высказывания
 вида $(x+2k+1): (2020-(2k+1))$ $a+2k+1 \quad x+2k+1=$
 $= a - (2020 - (2k+1)) \quad a: (2020-(2k+1))$, т.к. $(2020-(2k+1)):2$
 и $2020-2-1 \leq 2020-(2k+1) \leq 2019$ ~~и~~ $(2020-(2k+1)):$
 $:(2020-(2k+1)) \Rightarrow (a-(2020-(2k+1))): (2020-(2k+1)) = 1$
 $\Rightarrow x+2k+1): (2020-(2k+1))$ Значит все выс-
 казывания такого вида верны. Изначе
 высказыва Значит все высказывания
 с нечётными числами верны, а с чёт-

ными кет. ~~Выводы~~ Значим верных
высказываний ровно половина (выска-
зывают с истинным числом ровно
половина.)

~4 ~~Пусть~~ шестизначное число может
являться квадратом ~~только~~ ~~целого~~
значного числа, т.к. при возведении
k-значного числа в квадрат
получается $2k$ или $2k+1$ значное
число.

~~Пусть~~ Пусть a шестизначное
число является квадратом
числа $\overline{abc}$, тогда $a = (100a + 10b + c)^2 =$
 $= x^2 \cdot 10000 + y^2 \cdot 100 + z^2$ (x, y, z - числа, квад-
раты которых написаны зеленым

$\Rightarrow 10 \geq x \geq 3 \quad 10 \geq y \geq 3 \quad 10 \geq z \geq 3$). ~~Если~~

~~то~~ ~~$a(100a + 10b + c)$~~ ~~предположим~~ ~~$a \leq 4$~~

~~тогда~~ ~~$(100a + 10b + c)^2 \leq (100a + 99)^2$~~
 $= (100(a+1) - 1)^2 = 10000(a+1)^2 - 200(a+1) + 1$. Тогда

первое число a число $\leq 200(a+1) - 1 = 1$

$\Rightarrow 10000(a+1)^2 \geq 10000(a+1)^2 - 200(a+1) + 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ число образующее первыми двумя

цифрами число $10000(a+1) - 200(a+1) + 1$

не больше $(a+1)^2$. ~~тогда~~ ~~число обра.~~

$x^2 \leq$ число образ. образованного первыми

двумя цифрами число $10000(a+1)^2 - 200(a+1) +$

$+1$, т.к. $10000x^2 \leq 10000(a+1)^2 - 200(a+1) + 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \pi^2 < (1000a + 100b + c)^2 = 1000000a^2 + 100000ab + 10000ac + 10000b^2 + 2000bc + c^2 = 1000000\pi^2 + 10000y^2 + z^2 \Rightarrow \pi^2 \geq a^2$$

$$(a+1)^2 > \pi^2 \geq a^2 \Rightarrow \pi^2 = a^2 \Rightarrow \pi = a,$$

$$\text{Тогда } (1000\pi + 10b + c)^2 = \pi^2 \cdot 10000 + 10000\pi^2 + 10000\pi b + 10000\pi c + 10000b^2 + 2000bc + c^2 = 20000\pi^2 + 10000y^2 + z^2$$

$$10000\pi b < 10000 \Rightarrow \pi b < 1 \Rightarrow \pi \geq 4 \Rightarrow b \leq 2$$

$$\text{Если } \pi = 3, \text{ то } b = 1 \cup b = 0$$

$$1) \pi = 3, b = 1 \Rightarrow (310 + c)^2 =$$

$$\text{Если } b = 1, \text{ то } \pi \geq 5, \text{ то } (100\pi + 10 + c)^2 = 10000\pi^2 + 10000\pi + 10000\pi c + 10000c + c^2$$

$$\text{Если } \pi \geq 5, \text{ то } b = 0$$

$$\text{Если } b = 1, \text{ то } \pi < 5 \Rightarrow \pi = 4, (410 + c)^2 = 168100 + 820c + c^2 = 168100 + z^2 \Rightarrow 820c < 100$$

$$\Rightarrow 820c < 100, \text{ то } 820c > 100 (c \neq 0) \Rightarrow b = 0$$

$$\text{Если } \pi = 2, (200 + c)^2 = 80000 + 1800c + c^2 = z^2$$

$$80000 = 810000 + y^2 + z^2 \Rightarrow z^2 = c^2 \Rightarrow z = c,$$

$$18c = y^2 \Rightarrow c = 2 \cup c = 8 \Rightarrow c \geq 3 \Rightarrow \emptyset$$

$$\text{Если } \pi = 8, \text{ то } (800 + c)^2 = 640000 + 1600c + c^2 = z^2$$

$$\Rightarrow 8^2 = c^2 \Rightarrow y^2 = 16c \Rightarrow c = 1 \cup c = 4 \Rightarrow c \geq 4 \Rightarrow c = 4$$

$$(804)^2 = 646416 = 64 \cdot 10^4 + 64 \cdot 10 + 4$$

$$\text{Если } \pi = 7, \text{ то } y^2 = 14c \Rightarrow c < 10 \Rightarrow \emptyset$$

$$\text{Если } x=6, \text{ то } y^2 = 12C \Rightarrow y=3 \quad y \geq 4 \Rightarrow \emptyset$$

$$\text{Если } x=5, \text{ то } y^2 = 10C \Rightarrow \emptyset$$

$$\text{Если } x=4, \text{ то } y^2 = 8C \Rightarrow C=2 \quad C=8 \quad C \geq 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C=8$$

$$(408)^2 = 166464 = 16 \cdot 10^4 + 64 \cdot 100 + 64$$