№5

$$\begin{cases} xy-2y=x+106 & (1)\\ yz+3y=z+39 & (2)\\ zx+3z=2z+438 & (3)\end{cases}$$

(1): $xy-2y=x+106$

$y(x-2)=x+106$ $\boxed{x\neq 2}$

$y=\dfrac{x+106}{x-2}$

(2): $\dfrac{x+106}{x-2}\cdot z+3\cdot\dfrac{x+106}{x-2}=z+39$ $\left(\cdot(x-2)\right)$

$(x+106)z+3(x+106)=(z+39)(x-2)$

$xz+106z+3x+318=zx-2z+39x-78$

$108z-36x=-396$ $/:36$

$3z-x=-11$

$x=3z+11$

(3): $z(3z+11)+3(3z+11)=2z+438$

$3z^2+11z+9z+33=2z+438$

$3z^2+18z-405=0$

$\dfrac{D}{4}=81+3\cdot 405=9(9+135)=9\cdot 144=(36)^2$

$z_{1,2}=\dfrac{-9\pm 36}{3}=-3\pm 12$

$z=-3-12=-15$ или $z=-3+12=9$

$x=3(-15)+11=-34$ $x=3\cdot 9+11=38$

$y=\dfrac{-34+106}{-34-2}=-2$ $y=\dfrac{38+106}{38-2}=4$

$(-34;-2;-15)$ $(38;4;9)$

Ответ: $(-34;-2;-15)$; $(38;4;9)$.

№3

Если всего было n детей и каждый подарил разное кол-во, следовательно, от $\underline{n-1}$ до $\underline{0}$. Тогда всего подарков: $\frac{(n-1+0)\cdot n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$

Пусть n – чётное ($n=2k, k\in\mathbb{N}$), тогда

$\frac{n(n-1)}{2} \equiv 0 \pmod{n}$, то есть всем досталось равное кол-во подарков и лишних нет.

$$\frac{2k(2k-1)}{2} \equiv 0 \pmod{2k}$$

$$k(2k-1) \equiv 0 \pmod{2k}$$

$$2k-1 \equiv 0 \pmod{2}$$

$\underline{2k \equiv 1 \pmod{2}}$ – не верно, следовательно, n – не чётное.

Пусть n – нечётное ($n=2k-1; k\in\mathbb{N}$), тогда

$$\frac{(2k-2)(2k-1)}{2} \equiv 0 \pmod{2k-1}$$

$\underline{(k-1)(2k-1) \equiv 0 \pmod{2k-1}}$ – верно

и каждый получит по $k-1$ подарков

Например ~~да~~ пусть у i-ого человека $i-1$ подарков
(у 1-ого – 0; у 2-ого – 1; и т.д.; у n-ого – $n-1$).
Тогда если n имеет вид $2k-1$ ($k\in\mathbb{Z}$), то дают с n по k – всем младшим (по номеру) детям, а с $k-1$ до 1 – всем старшим, так что у них было $\leq k-1$.

Ответ: для всех нечётных n.

№2

$\overline{X_2} < X_2$

$\frac{1}{2}(x_1+x_2) < x_2$

$x_1 + x_2 < 2x_2$

$x_1 < x_2$

Логично, что чтобы среднее арифметическое с новым числом было ~~больше~~ меньше числа, то это новое число должно быть больше среднего арифметического без этого часла.
Следовательно, если $\overline{X_k} < X_k$, то $\overline{X_{k-1}} < X_k$ и также $\overline{X_{k-1}} < \overline{X_k}$

При $\overline{X_k} > X_k$, аналогично, $\overline{X_{k-1}} > X_k$, получаем, что:

$$\overline{X_1} < \overline{X_2} < \overline{X_3} < \overline{X_4} < \overline{X_5} < \overline{X_6} > \overline{X_7} > \overline{X_8} > \overline{X_9} > \overline{X_{10}} > \overline{X_{11}} > \overline{X_{12}}$$

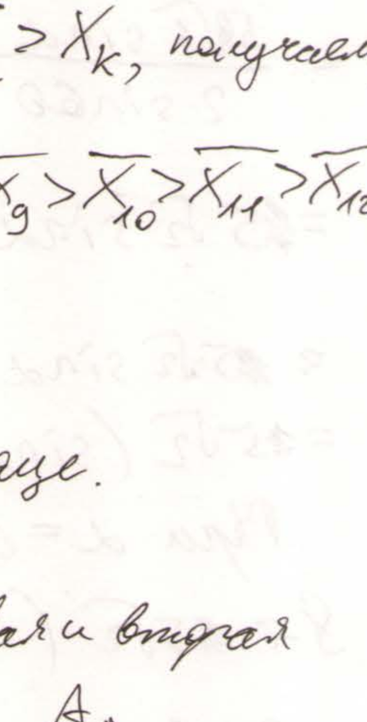
$\Downarrow$

Наибольшее $\overline{X_i}$ при $i=6$.

Ответ: в шестом (июне) месяце.

№1

Пусть K и E – соответственно, первая и вторая точка касания.



$AE = b$; $AK = c$; $KE = a$

Заметим, что путь мухи рекурсивен ($\triangle AKC \sim \triangle EFC$), а значит её путь – это сумма бесконеч. убыв. геом. прогрес:

$S = \frac{a}{1-q} + \frac{c}{1-q}$, но $\frac{b}{1-q} = AC = \frac{5\sqrt{6}}{2}$ см. на обороте

$$\frac{1}{1-q} = \frac{5\sqrt{6}}{2b}$$

$$S = \frac{1}{1-q}(a+c) = \frac{5\sqrt{6}}{2b}(a+c)$$

А по теор. синусов:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin 60} = \frac{c}{\sin(120-\alpha)}$$

$$b = \frac{a\cdot\sin 60}{\sin\alpha}$$

$$c = \frac{a\cdot\sin(120-\alpha)}{\sin\alpha}$$

$$S = \frac{5\sqrt{6}\cdot\sin\alpha}{2a\cdot\sin 60}\left(a + \frac{a\cdot\sin(120-\alpha)}{\sin\alpha}\right) =$$

$$= \frac{5\sqrt{6}\sin\alpha}{2\sin 60}\left(1 + \frac{\sin(120-\alpha)}{\sin\alpha}\right) =$$

$$= \cancel{1}5\sqrt{2}\sin\alpha\left(1 + \frac{\sin(120-\alpha)}{\sin\alpha}\right) =$$

$$= \cancel{1}5\sqrt{2}\sin\alpha + 15\sqrt{2}\sin(120-\alpha) =$$

$$= \cancel{1}5\sqrt{2}(\sin\alpha + \sin(\alpha+60))$$

При $\alpha = 60$:

$$S = \cancel{1}5\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \cancel{1}5\cdot\sqrt{2}\cdot 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \cancel{1}5\sqrt{6} > 12$$

$$25\cdot 6 > 144$$

$$150 > 144$$

Ответ: да, может пролететь больше 12 метров.