

N2

1. Докажем, что $\bar{x}_{k-1} < \bar{x}_k$

при k от 2 до 6:

Заметим, что $k\bar{x}_k = (k-1)\bar{x}_{k-1} + x_k$
 $(k\bar{x}_k = (k-1)\bar{x}_{k-1} + x_k \Leftrightarrow x_1 + \dots + x_k =$
 $= x_1 + \dots + x_{k-1} + x_k)$

По условию $\bar{x}_k < x_k \Rightarrow$

$$k\bar{x}_k + x_k > (k-1)\bar{x}_{k-1} + x_k + \bar{x}_k$$

$$\Leftrightarrow (k-1)\bar{x}_k > (k-1)\bar{x}_{k-1} \Leftrightarrow \bar{x}_k > \bar{x}_{k-1}$$

Доказано.

2. Аналогично докажем, что

$\bar{x}_{k-1} > \bar{x}_k$ при k от 7 до 12:

$$k\bar{x}_k = (k-1)\bar{x}_{k-1} + x_k$$

По условию $\bar{x}_k > x_k \Rightarrow$

$$k\bar{x}_k + x_k < (k-1)\bar{x}_{k-1} + x_k + \bar{x}_k \Leftrightarrow$$

$$(k-1)\bar{x}_k < (k-1)\bar{x}_{k-1} \Leftrightarrow \bar{x}_k < \bar{x}_{k-1}$$

Доказано.

3. Из пунктов 1 и 2:

$$\bar{x}_1 < \bar{x}_2 < \bar{x}_3 < \bar{x}_4 < \bar{x}_5 < \bar{x}_6 > \bar{x}_7 > \bar{x}_8 > \bar{x}_9 > \bar{x}_{10} > \bar{x}_{11} > \bar{x}_{12}$$

$\Rightarrow \bar{x}_6$ - наибольшее среди $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_{12}$.

Ответ: в июне.

N3

1. Докажем, что N - нечетное:

Каждый ребенок мог подарить не более $N-1$ подарков, т.к. детей кроме него $N-1$.

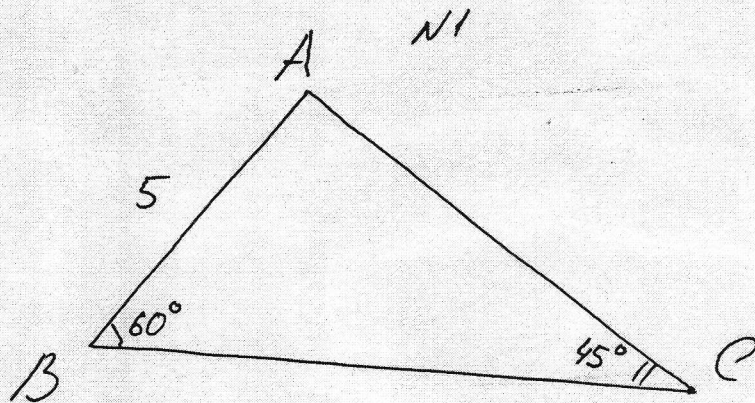
Т.к. все дарили разное число подарков, кол-во подарков, которые получили дети принимают значения от 0 до $N-1$:

1 человек - 0, 2 человек - 1, ..., N человек - $N-1$. Суммарное кол-во подарков $0+1+\dots+(N-1) = \frac{N(N-1)}{2}$. Т.к. все дети получили поровну подарков, каждый ребенок получил по $\frac{N-1}{2}$ подарку. Следовательно, $N \div 2$.

2. Покажем, как нужно раздавать подарки, чтобы при $N \geq 2$ условия выполнялись:

Разовьем всех детей кроме ребенка, который не дарит подарки, на пары. Пусть если один ребенок в паре подарил k подарков, другой ребенок подарил $N-k$. Первый ребенок пусть дарит подарок к детям всякого ребенка в его паре. Тогда второй ребенок пусть дарит подарок тем детям, которые не получили подарок от первого ребенка в паре. Тогда от каждой пары каждый ребенок получит по одному подарку, т.е. ка-во подарков у всех детей будет одинаковым, при этом каждый подарил разное число подарков.

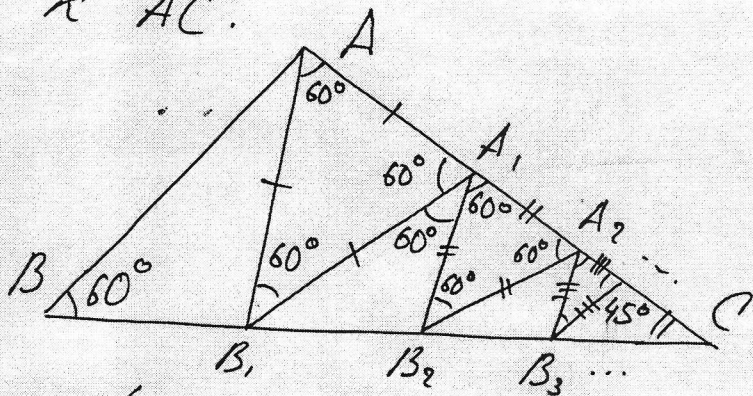
Ответ: при нечетных N .



Оценки
1. Найдем AC:

По теореме синусов: $\frac{5}{\sin 45^\circ} = \frac{AC}{\sin 60^\circ}$
 $\Rightarrow AC = 5 \cdot \frac{\sin 60^\circ}{\sin 45^\circ} \Rightarrow AC = 5 \cdot \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \Rightarrow$
 $AC = 5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \Rightarrow AC = \sqrt{\frac{75}{2}} \Rightarrow AC > \sqrt{36} \Rightarrow$
 $AC > 6$.

2. Пусть муха летит под углом 60° к AC.



3. Пусть муха летает по BC в точках $B_1, B_2, B_3, \dots$ и по AC в точках $A_1, A_2, A_3, \dots$

4. Очевидно, треугольники $AA_1B_1, A_1A_2B_2, \dots$

... $A_i A_{i+1} B_{i+1}$ - равносторонние $\Rightarrow$
 $\Rightarrow$ длина траектории мухи равна
 $2 AC$, т.е. > 12 .

Ответ: может.

N5

$$\begin{cases} xy - 2y = x + 106 & (1) \\ yz + 3y = z + 39 & (2) \\ zx + 3x = 2z + 438 & (3) \end{cases}$$

$$(1) \quad xy - 2y = x + 106 \Leftrightarrow xy - x = 106 + 2y \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(y-1) = 106 + 2y \quad (y \neq 1, \text{ т.к. } 0 \neq 108)$$

$$\Leftrightarrow \underline{x = \frac{106 + 2y}{y-1}} \quad (*)$$

$$(2) \quad \cancel{yz + 3y = z + 39 \Leftrightarrow}$$

$$(3) \quad zx + 3x = 2z + 438 \Leftrightarrow x(z+3) = 2z + 438$$

$$(z \neq -3, \text{ т.к. } 0 \neq 432) \Leftrightarrow$$

$$\underline{x = \frac{2z + 438}{z+3}} \quad (**)$$

(*) и (**)

$$\Rightarrow \frac{106 + 2y}{y-1} = \frac{2z + 438}{z+3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 106z + 318 + \cancel{2yz} + 6y = \cancel{2yz} - 2z + 438y - 438 \Leftrightarrow 108z + 756 = 432y \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow z + 7 = 4y \quad (***)$$

$$(2) \text{ u } (***) : yz + 3y = z + 39 \Leftrightarrow$$

$$y = \Leftrightarrow y = \frac{z+39}{z+3} \quad (z \neq -3) \Rightarrow$$

$$y = \frac{4y - 7 + 39}{4y - 7 + 3} \Leftrightarrow y = \frac{4y + 32}{4y - 4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{y+8}{y-1} \Leftrightarrow y^2 - y = y + 8 \quad (\cancel{y \neq 1})$$

$$\Leftrightarrow y^2 - 2y - 8 = 0 \Leftrightarrow (y-4)(y+2) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = \begin{cases} 4 & \text{(I)} \\ -2 & \text{(II)} \end{cases}$$

$$(I) \quad y = 4 \Rightarrow 4x - 8 = x + 106 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x = 114 \Leftrightarrow x = 38 \Rightarrow 38z + 3 \cdot 38 = 2z + 438$$

$$\Leftrightarrow 36z = 324 \Leftrightarrow z = 9 \Rightarrow (38, 4, 9) -$$

- корень

$$(II) \quad y = -2 \Rightarrow \cancel{-2x + 4y = x + 106}$$

$$-2x + 4 = \cancel{x} + 106 \Rightarrow -3x = 102 \Rightarrow$$

$$x = -34 \Rightarrow -34z - 3 \cdot 34 = 2z + 438 \Leftrightarrow$$

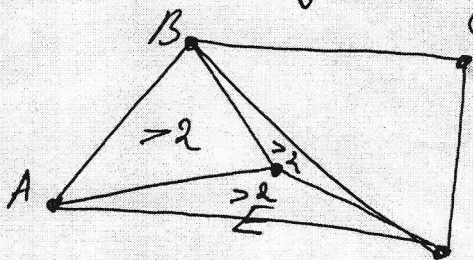
$$\Leftrightarrow -36z = 540 \Leftrightarrow z = -15 \Rightarrow (-34, -2, -15) -$$

- корень Ответ: $(38, 4, 9)$ или $(-34, -2, -15)$.

1. Заметим, что есть 3 случая:

- 1) 5 точек образуют выпуклый пятиугольник
- 2) 4 точки образуют выпуклый четырехугольник, а 5-ая точка лежит внутри этого четырехугольника.
- 3) 3 точки образуют треугольник, две другие лежат внутри него.

2. 2-ой случай:

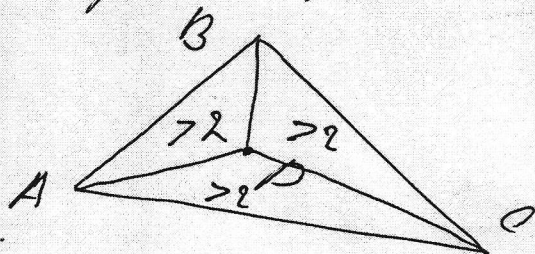


Пусть A, B, C, D образуют выпуклый четырехугольник, а E лежит внутри. Тогда E лежит либо в $\triangle ABD$, либо в $\triangle BCD$. Не умаляя общности пусть это $\triangle ABD$. Тогда $S_{\triangle ABD} = S_{\triangle ABE} + S_{\triangle BED} + S_{\triangle AED} > 6$

$$> 2 + 2 + 2 = 6 > 3$$

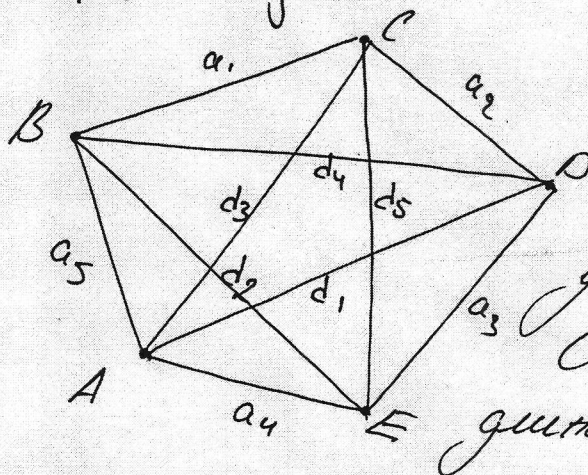
3. 3-ий случай:

Пусть есть треугольник ABC и точка D внутри него (~~и 5-ую точку E~~ рассматривать не будем):



$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ADB} + S_{\triangle BDC} + S_{\triangle ADC} > 2 + 2 + 2 = \underline{6 > 3}$$

4. 1-ый случай:



Пусть A, B, C, D, E - вершины

выпуклого пяти-

угольника.

Обозначим стороны a_i и длины сторон

$a_1, a_2, \dots, a_5$ как на рисунке. Пусть $d_1, d_2, \dots, d_5$ - длины диагоналей этого

пятиугольника (d_i напротив a_i).

Заметим, что $d_i \geq 2 \cdot a_i$ (*).

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^5 d_i \geq 2 \cdot \sum_{i=1}^5 a_i$$

из неравенства треугольника:

$$a_1 + a_2 > d_4, a_2 + a_3 > d_5, \dots, a_1 + a_5 > d_3 \Rightarrow$$

$$2 \sum_{i=1}^5 a_i > \sum_{i=1}^5 d_i. \text{ Противоречие.}$$

Доказано.