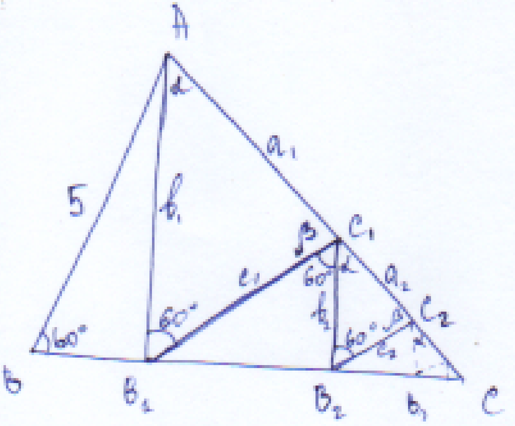
1.



$\frac{AC}{\sin 60°} = \frac{AB}{\sin 45°} \Rightarrow AC = \frac{5\cdot\frac{\sqrt{3}}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2}}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{6}}{2}$ по т. синусов для ΔABC

1) Заметим, что прямые $AB_1, C_1B_2, C_2B_3 \dots C_iB_{i+1} \dots$ попарно параллельны

т.к. $\angle AB_1C_1 = \angle B_1C_1B_2 \Rightarrow AB_1 \parallel C_1B_2$

$60° = \angle C_1B_2C_2 = \angle B_2C_2B_3 \Rightarrow C_1B_2 \parallel C_2B_3$

....

$\angle C_iB_{i+1}C_{i+1} = \angle B_{i+1}C_{i+1}B_{i+2} \Rightarrow C_iB_{i+1} \parallel C_{i+1}B_{i+2}$

$\Rightarrow AB_1 \parallel C_1B_2 \parallel C_2B_3 \parallel \dots \parallel C_{i+1}B_{i+2} \parallel \dots$

Аналогично, прямые $B_1C_1 \parallel B_2C_2 \parallel B_3C_3$

т.к. $\angle B_iC_iB_{i+1} = 60° = \angle C_iB_{i+1}C_{i+1}$, $i \in N$

$\Rightarrow$ прямые $AB_1, C_1B_2, C_2B_3 \dots$ образуют с прямой AC один и тот же угол α

а прямые $B_1C_1, B_2C_2, B_3C_3 \dots$ ~~одн~~ образуют с прямой AC один и тот же угол β

2) Предположим, что муха в какой-то момент времени прошла > 12 метров. Будем считать муха сделала это до точки C_n, т.е пролетела путь длиной $L = \sum_i^n (b_i + c_i)$, также заметим, что $\sum_i^{\infty} a_i = AC = \frac{5\sqrt{6}}{2}$

$\frac{b_i}{\sin\beta} = \frac{a_i}{\sin 60°}$ по т. синусов $\Rightarrow b_i = \frac{a_i \sin\beta}{\sin 60°}$

$\frac{c_i}{\sin\alpha} = \frac{a_i}{\sin 60°}$ по т. синусов $\Rightarrow c_i = \frac{a_i \sin\alpha}{\sin 60°}$

$\Rightarrow L = \sum_i^n (b_i + c_i) = \sum_i^n \left(\frac{a_i \sin\beta}{\sin 60} + \frac{a_i \sin\alpha}{\sin 60}\right) =$

$= \sum_i^n \frac{a_i}{\sin 60°}(\sin\alpha + \sin\beta) = \frac{(\sin\alpha + \sin\beta)}{\sin 60°} \cdot \sum_i^n a_i \overset{n\to\infty}{=}$

$= \frac{\sin\alpha + \sin(120° - \alpha)}{\sin 60°} \cdot \frac{5\sqrt{6}}{2} = \frac{2\sin\frac{\alpha + 120 - \alpha}{2}\cos\frac{120° - 2\alpha}{2} \cdot \frac{5\sqrt{6}}{\cancel{2}}}{\sin 60°} =$

$= \frac{\cancel{\sin 60°}\cos(60° - \alpha) 5\sqrt{6}}{\cancel{\sin 60°}} = 5\sqrt{6} \cdot \cos(60° - \alpha)$

$\Rightarrow$ при $\cos(60° - \alpha) 5\sqrt{6} > 12$ $\cos(60° - \alpha) > \frac{12}{5\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{6}}{5}$

$\cos(60° - \alpha) > \frac{2\sqrt{6}}{5}$

$\frac{2\sqrt{6}}{5} < 1$ т.к. $2\sqrt{6} < 5$ $(24 < 25)$ $\Rightarrow \exists\, \alpha$ что $\cos(60° - \alpha) > \frac{2\sqrt{6}}{5}$

продолжение →

$\Rightarrow$ при $\alpha \to 60^\circ$ $\cos(60^\circ - \alpha) \to \cos 0^\circ = 1 > \frac{2\sqrt{6}}{5}$

$\Rightarrow$ может быть такое, что муха в какой-то момент времени пролетела > 12 м.

$k \geq 1$

2. 1) Пусть для k+1 выполнено, что $\overline{x_{k+1}} < x_{k+1}$

Докажем, что $\overline{x_{k+1}} > \overline{x_k}$:

$\overline{x_{k+1}} = \frac{1}{k+1}((x_1 + \dots + x_k) + x_{k+1})$ $\qquad x_1 + \dots + x_k = k\overline{x_k}$

$(\overline{x_{k+1}})(k+1) = k\overline{x_k} + x_{k+1}$

$\overline{x_{k+1}}k + \overline{x_{k+1}} = k\overline{x_k} + x_{k+1}$

$k(\overline{x_{k+1}} - \overline{x_k}) = x_{k+1} - \overline{x_{k+1}} > 0$

$\Rightarrow k(\overline{x_{k+1}} - \overline{x_k}) > 0 \Rightarrow \overline{x_{k+1}} > \overline{x_k}$.

2) Аналогично, если для k+1 выполнено $\overline{x_{k+1}} > x_{k+1}$

то докажем, что $\overline{x_{k+1}} < \overline{x_k}$

$\overline{x_{k+1}} = \frac{1}{k+1}(x_1 + \dots + x_k + x_{k+1})$

$(\overline{x_{k+1}})k + \overline{x_{k+1}} = \overline{x_k} \cdot k + x_{k+1}$

$k(\overline{x_{k+1}} - \overline{x_k}) = x_{k+1} - \overline{x_{k+1}} < 0$

$\Rightarrow \overline{x_{k+1}} - \overline{x_k} < 0 \Rightarrow \overline{x_{k+1}} < \overline{x_k}$

3) $\Rightarrow$ из условия $\overline{x_1} < \overline{x_2} < \overline{x_3} < \overline{x_4} < \overline{x_5} < \overline{x_6} > \overline{x_7} >$
$> \overline{x_8} > \overline{x_9} > \overline{x_{10}} > \overline{x_{11}} > \overline{x_{12}}$

$\Rightarrow$ наиб $\overline{x_i}$ равно $\overline{x_6}$

Ответ: в 6-м месяце.

3. Ответ: при нечётном $N > 1$

Докажем, что ~~при~~ N – чёт, ситуация не будет (быть исполнена) удовлетворять условию: пусть ~~...~~ при N ситуация удовлетв. усл.

1) всего ~~...~~ один ребёнок мог подарить $0, 1, \dots N-1$ подарок, а т.к. всего детей N и чисел от 0 до $N-1$ (вкл) тоже N и все дети подарили разное кол-во подарков, то дети подарили $0, 1, 2 \dots N-1$

$\Rightarrow$ всего $0+1+\dots+N-1 = \dfrac{(N-1+1)(N-1)}{2} =$

$= \dfrac{N(N-1)}{2}$ подарков

Т.к. $\forall$ ребёнок получил одинаковое кол-во подарков k, то $k \in \mathbb{N}$

$N \neq 1 \rightarrow k \neq 0.$

$$k = \frac{N(N-1)}{2 \cdot N} = \frac{N-1}{2}$$

$\Rightarrow N = 2k+1$ – нечёт. число. $\Rightarrow N$-чёт быть не может.

~~*~~ Приведём пример для $\forall N$-нечёт, как дети должны раздавать подарки, чтобы $\forall$ реб. получил по $\dfrac{N-1}{2}$ подарков:

разобьём $N-1$ детей на пары: (1-й; $N-1$-й); (2-й; $N-2$)... и ост. N-й ребёнок

Пусть в паре $(i; N-i)$ i-й ребёнок раздаст i подарков разным детям, а $N-i$ — $N-i$ подарков другим детям, чтоб каждый ребёнок получил 1 подарок от пары

$\Rightarrow \forall$ пара раздаст по N подарков

а N-й раздаст 0 подарков из N

$\Rightarrow \forall$ получит по $\dfrac{N-1}{2}$ подарков (по кол-ву пар)

$\Rightarrow \forall N = 2k+1$ $k \in N$ удовлетворяет условию, ~~а~~ чёт N нет.

5. $\begin{cases} xy - 2y = x + 106 \\ yz + 3y = z + 39 \\ zx + 3x = 2z + 438 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy - 2y - x + 2 = 108 \\ yz + 3y - z - 3 = 36 \\ zx + 3x - 2z - 6 = 432 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y(x-2) - (x-2) = 108 \\ y(z+3) - (z+3) = 36 \\ x(z+3) - 2(z+3) = 432 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)(y-1) = 108 \\ (y-1)(z+3) = 36 \\ (x-2)(z+3) = 432 \end{cases}$

$x - 2 = a$; $y - 1 = b$; $z + 3 = c$

$\begin{cases} ab = 108 \\ bc = 36 \\ ac = 432 \end{cases}$ $\quad 108 = 2^2 \cdot 3^3$ $\quad 36 = 2^2 \cdot 3^2$ $\quad 432 = 2^4 \cdot 3^3$ $\quad (abc)^2 = 108 \cdot 36 \cdot 432 = 2^8 \cdot 3^8$

$\Rightarrow abc = |2^4 \cdot 3^4|$

$\Rightarrow c = |2^4 \cdot 3^4| / (2^2 \cdot 3^3) = |2^2 \cdot 3|$

$b = |2^4 \cdot 3^4| / (2^4 \cdot 3^3) = |3|$

$a = |2^4 \cdot 3^4| / (2^2 \cdot 3^2) = |2^2 \cdot 3^2|$

Т.к. попарные произведения a, b, c положительны, то все числа a, b, c одного знака (иначе произведение каких-то двух чисел будет отрицательно)

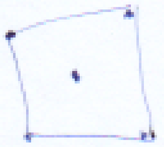
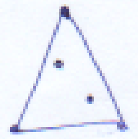
$\Rightarrow$ 1) $\begin{cases} a = 36 \\ b = 3 \\ c = 12 \end{cases}$ $\quad$ 2) $\begin{cases} a = -36 \\ b = -3 \\ c = -12 \end{cases}$

$\begin{cases} x - 2 = 36 \\ y - 1 = 3 \\ z + 3 = 12 \end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases} x - 2 = -36 \\ y - 1 = -3 \\ z + 3 = -12 \end{cases}$

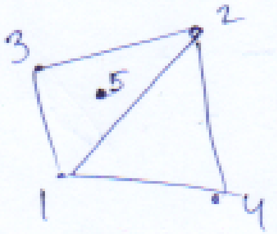
$\begin{cases} x = 38 \\ y = 4 \\ z = 9 \end{cases}$ $\quad$ $\begin{cases} x = -34 \\ y = -2 \\ z = -15 \end{cases}$

Ответ: $(38; 4; 9)$; $(-34; -2; -15)$.

4. 1) случай когда пять точек не образуют выпуклый пятиугольник

$\Rightarrow$  или 

1.1 1.2

1.1) 

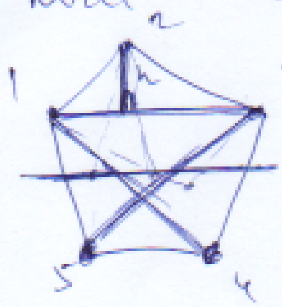
5 точка попала в один из треугольников 132 или 124 пусть в 123

$\Rightarrow S_{123} = S_{135} + S_{235} + S_{125} \geq 2+2+2 = 6 \Rightarrow S_{123} \geq 3$

1.2) 

Аналогично с 1.1) $S_{123} \geq S_{135} + S_{235} + S_{125} \geq 6 \Rightarrow S_{123} \geq 3$.

2) случай, когда пять точек образуют выпуклый пятиугольник.



Возьмём один из Δ-ов: 123 или 234 или 345 или 451 или 512 такой, чтобы имел среди них малую площадь. Пусть без огр. общ. – $\Delta 123$. Проведём прямую $\parallel 13$ на расстоянии h от 13