

Задача 2 (7)

M 313(5),

$$\bar{x}_1 = x_1, \bar{x}_2 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2), \dots, \bar{x}_{12} = \frac{1}{12}(x_1 + \dots + x_{12})$$

$$k \in [2; 6] \quad \bar{x}_k < x_k$$

$$k \in [7; 12] \quad \bar{x}_k > x_k$$

Сравним среднее производство товара за январь и февраль:

$$x_1 \quad ? \quad \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$$

Из условия нам известно, что $\bar{x}_2 < x_2 \Rightarrow \frac{1}{2}(x_1 + x_2) < x_2$

$$x_1 + x_2 < 2x_2$$

$$\underline{x_1 < x_2}$$

$\Rightarrow$ Рассмотрим выражение $(\bar{x}_2 - \bar{x}_1)$:

$$\bar{x}_2 - \bar{x}_1 = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 - x_1 = \frac{x_1 + x_2 - 2x_1}{2} = \frac{x_2 - x_1}{2}$$

Т.к. $x_2 > x_1$, то $\frac{x_2 - x_1}{2} > 0$. Значит за второй месяц среднее производство товара с начала года больше, чем за первый месяц.

При рассмотрении среднего произв. товара за месяцы под номерами 2, 3, 4, 5, 6 будет наблюдаться то же самое:

$$\bar{x}_1 < \bar{x}_2 < \bar{x}_3 < \bar{x}_4 < \bar{x}_5 < \bar{x}_6$$

Сравним теперь $\bar{x}_6$ и $\bar{x}_7$:

Из условия нам известно, что $\bar{x}_7 > x_7 \Rightarrow \frac{1}{7}(x_1 + \dots + x_7) > x_7$

$$(x_1 + \dots + x_7) > 7x_7$$

$$(x_1 + \dots + x_6) > 6x_7$$

Вычтем из $\bar{x}_6$ значение $\bar{x}_7$:

$$\bar{x}_6 - \bar{x}_7 = \frac{1}{6}(x_1 + \dots + x_6) - \frac{1}{7}(x_1 + \dots + x_7) =$$

$$= (x_1 + \dots + x_6) \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{7} \right) - \frac{x_7}{7} =$$

$$= \frac{(x_1 + \dots + x_6) - 6x_7}{6 \cdot 7}$$

Т.к. $(6x_7 < (x_1 + \dots + x_6))$, то в данной дроби числитель будет отрицательным числом.

$$\Rightarrow \bar{x}_7 < \bar{x}_6$$

M 313(5)₂

Таким образом, расчёт изменения условия после 6-го месяца среднее производство товара с начала года будет уменьшаться.

К примеру сравним ещё $\bar{x}_7$ и $\bar{x}_8$

Из условия нам известно, что $\bar{x}_8 > x_8 \Rightarrow \frac{1}{8}(x_1 + \dots + x_8) > x_8$

$$(x_1 + \dots + x_8) > 8 \cdot x_8$$

$$(x_1 + \dots + x_7) > 7 \cdot x_8$$

Вычтем из $\bar{x}_7$ значение $\bar{x}_8$:

$$\bar{x}_7 - \bar{x}_8 = \frac{1}{7}(x_1 + \dots + x_7) - \frac{1}{8}(x_1 + \dots + x_8) =$$

$$= (x_1 + \dots + x_7) \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{8} \right) - \frac{x_8}{8} =$$

$$= \frac{(x_1 + \dots + x_7) - 7x_8}{7 \cdot 8}$$

Отсюда же значение числителя будет принимать отрицательное значение

$$\Rightarrow \bar{x}_8 < \bar{x}_7$$

Итак:

$$\begin{cases} \bar{x}_6 > \bar{x}_7 > \bar{x}_8 > \bar{x}_9 > \bar{x}_{10} > \bar{x}_{11} > \bar{x}_{12} \\ \bar{x}_6 > \bar{x}_5 > \bar{x}_4 > \bar{x}_3 > \bar{x}_2 > \bar{x}_1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Наибольшее значение мы получим при $\bar{x}_6$

Ответ: в 6 месяце

Задание 3 (3)

$N > 1$, по условию.

Так как каждый из детей дарит разное количество, то один ребёнок мог подарить либо 0 подарков, либо 1, либо любое целое число подарков в диапазоне от 0 до $(N-1)$, т.к. самому себе он не может подарить. Каждое число из диапазона было использовано лишь 1 раз.

~~При общем подарками~~

Общее количество подарков будет равно сумме $(0 + 1 + \dots + (N-1))$, которое должно быть кратно N , так как все получили поровну подарков (по условию).

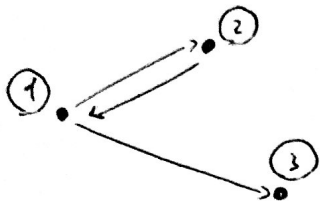
$\Rightarrow$ Каждый ребёнок получит по $\left(\frac{0 + 1 + \dots + (N-1)}{N} \right)$ подарков

Это условие будет выполняться лишь при четных значениях N .

M 313(5)3

Приведу два примера:

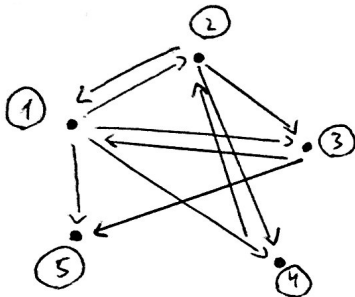
1) $N = 3 \Rightarrow \frac{0+1+2}{3} = 1$ - у каждого по 1 подарку



- ① - подарил 2 подарка
получил 1
- ② - подарил 1 подарок
получил 1
- ③ - подарил 0 подарков
получил 1

все условия
выполнены

2) $N = 5 \Rightarrow \frac{0+1+2+3+4}{5} = 2$ - у каждого по 2 подарка



- ① - подарил 4
получил 2
- ② - подарил 3
получил 2
- ...
- ⑤ - подарил 0
получил 2

все условия
выполнены

При любом четном значении N мы не сможем подарить подарки

Пример:

$N = 2 \mid \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$ - не подходит

$N = 4 \mid \frac{0+1+2+3}{4} = \frac{3}{2}$ - не подходит

$N = 6 \mid \frac{0+1+2+3+4+5}{6} = \frac{5}{2}$ - не подходит

и так далее

При четном значении N мы имеем в числительном четное количество слагаемых:

$$\frac{0 + 1 + 2 + \dots + (N-2) + (N-1)}{N}$$

при сумме крайних слагаемых мы будем получать N :

$$1 + (N-1) = N$$

$$2 + (N-2) = N$$

В итоге между подобными парами останется число, которое

не будет кратен N , значит и все числители не будет кратен N .

МЗ13(5)₄

$\Rightarrow N$ всегда принимает чётные значения

Ответ: при чётных N

Задача 5 (7)

$$\begin{cases} xy - 2y = x + 106 & (1) \\ yz + 3y = z + 39 & (2) \\ 2x + 3x = 2z + 438 & (3) \end{cases}$$

Из (1) и (2) выразим x и z через y :

(1) ~~$xy - 2y = x + 106$~~

$$xy - x - 2y = 106$$

$$x(y-1) = 106 + 2y$$

$$x = \frac{106 + 2y}{y-1}, \text{ при } y \neq 1$$

(2) $yz - z = -3y + 39$

$$z(y-1) = 39 - 3y$$

$$z = \frac{39 - 3y}{y-1}, \text{ при } y \neq 1$$

Подставим значения x и z в (3), тем самым получим уравнение с одной неизвестной:

$$\left(\frac{39-3y}{y-1}\right)\left(\frac{106+2y}{y-1}\right) + 3\left(\frac{106+2y}{y-1}\right) = 2\left(\frac{39-3y}{y-1}\right) + 438$$

$$\left(\frac{106+2y}{y-1}\right)\left(\frac{39-3y+3y-3}{y-1}\right) = 2\left(\frac{39-3y}{y-1}\right) + 438$$

$$\frac{(106+2y) \cdot 36}{(y-1)^2} - \frac{78-6y}{y-1} - 438 = 0$$

$$\frac{36(106+2y) - (y-1)(78-6y) - 438(y-1)^2}{(y-1)^2} = 0$$

$$\begin{cases} -432y^2 + 864y + 3456 = 0 & | : 432 \\ y \neq 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -y^2 + 2y + 8 = 0 \\ y^2 - 2y - 8 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} D = 4 + 32 = 36 \\ y = \frac{2 \pm 6}{2} \end{cases} \begin{cases} y = 4 \\ y = -2 \end{cases}$$

Найти наименьшее значение y :

МЗБ(5)с

1) при $y = 4$

$$x = \frac{106 + 8}{3} = 8$$

$$z = \frac{39 - 12}{3} = 9$$

2) при $y = -2$

$$x = \frac{106 - 4}{-3} = -34$$

$$z = \frac{39 + 6}{-3} = -15$$

Т.к. ранее мы исключили вариант $y = 1$, то проверяем его:

$y = 1$, тогда:

$$x - 2 = x + 106$$

$$-2 = 106 \Rightarrow \text{такого быть не может}$$

$\Rightarrow y \neq 1$

Ответ: при $y = 4$; $x = 8$; $z = 9$.

при $y = -2$; $x = -34$; $z = -15$.

Задача 1

(7)

Дано:

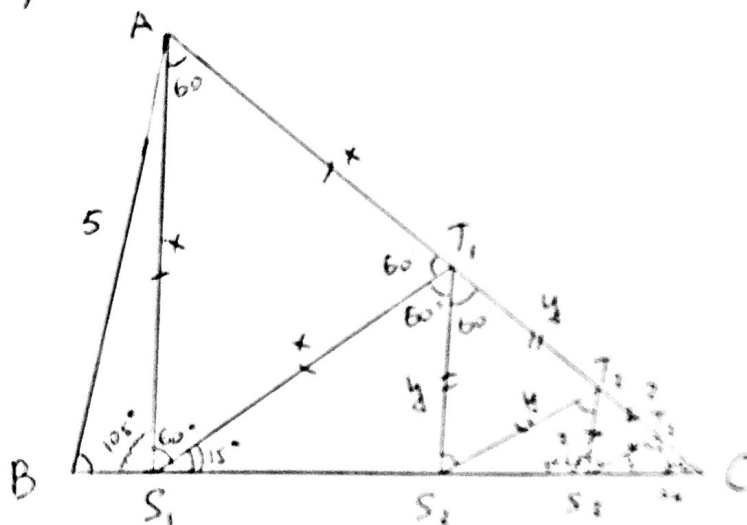
$\triangle ABC$

$\angle B = 60^\circ$

$\angle C = 45^\circ$

$AB = 5$ м

угол обзора $= 60^\circ$



Решение:

Воспользуемся теоремой синусов в $\triangle ABC$:

$$\frac{AB}{\sin 45^\circ} = \frac{AC}{\sin 60^\circ} \quad \left| \frac{5}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{AC}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \right| \Rightarrow AC = \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{6}}{2}$$

Мухомов может пролететь больше 12 м в том случае, когда треугольники, образованные на каждой стороне из точек стороны AC и образующих дуги окружности.

$\Rightarrow \triangle AT_1S_1, \triangle T_1T_2S_2, \triangle T_2T_3S_3, \dots$ - равносторонние.

Этот случай не противоречит условию, и это возможно.

Пусть $AT_1 = x; T_1T_2 = y; T_2T_3 = z$

M313(5)₆

P-и $\triangle ABC$

$$\angle A = 180^\circ - \angle C - \angle B = 75^\circ$$

$$\angle BAS_1 = 75^\circ - \angle S_1AT_1 = 15^\circ$$

$$\angle BS_1A = 180^\circ - \angle B - \angle BAS_1 = 105^\circ$$

P-и $\triangle BAS_1$:

Воспользуемся теоремой синусов:

$$\frac{AB}{\sin(105^\circ)} = \frac{AS_1}{\sin(60^\circ)} \Rightarrow AS_1 = \frac{AB \cdot \sin(60^\circ)}{\sin(105^\circ)} = \frac{5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{\sin(90^\circ + 15^\circ)} = \frac{5\sqrt{3}}{2} : \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} =$$

$$= \frac{5 \cdot \sqrt{3} \cdot 4}{2(\sqrt{6} + \sqrt{2})} = \frac{10 \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} \approx \frac{10 \cdot 1,74}{3,858} \approx 4,5$$

P-и $\triangle S_1S_2T_1$:

Восп. теоремой синусов:

$$\frac{S_1T_1}{\sin(105^\circ)} = \frac{T_1C}{\sin(15^\circ)} \Rightarrow T_1C = \frac{S_1T_1 \cdot \sin(15^\circ)}{\sin(105^\circ)} \approx \frac{4,5 \cdot (\sqrt{6} - \sqrt{2})}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} =$$

$$= \frac{4,5(\sqrt{6} - \sqrt{2})^2}{4} \approx \frac{4,5 \cdot 1,061}{4} \approx \frac{4,7745}{4} \approx 1,144$$

P-и $\triangle S_2T_2S_3$

Восп. теоремой синусов:

$$\frac{y}{\sin(105^\circ)} = \frac{z}{\sin(15^\circ)} \Rightarrow z = \frac{y \cdot \sin(15^\circ)}{\sin(105^\circ)} \approx \frac{1,144 \cdot 1,061}{4} \approx 0,382$$

$$\Rightarrow AS_1 + S_1T_1 + T_1S_2 + S_2T_2 + T_2S_3 + S_3T_3 \approx 9 + 2,288 + 0,764 \approx 12,052$$

Муха уже пролетела 12 м, хотя на этом её путь не закончился.

$\Rightarrow$ Может, если треугольники построенные из линий деления мухи и опирающиеся на катет - то часть AC будут равнобедренными. ($\Rightarrow$ при условии, что $\angle T_1AS_1 = 60^\circ$)

Ответ: да, может

Правильный пятиугольник можно вписать в окружность.
 $\angle ACE = \angle ADE = \angle ADE$ (т.к. они опираются на одну и ту же дугу)

$$\Rightarrow \angle ACE = \frac{108^\circ}{3} = 36^\circ$$

11313(5)7

Р-и $\triangle ACE$:

$\triangle ACE$ - равнобедренный $\Rightarrow AC = CE = y$
 (т.к. углы при основании равны)

Воспользуемся теоремой косинусов:

$$AE^2 = 2y^2 - 2y^2 \cdot \cos(36^\circ)$$

$$\frac{80}{19} = 2y^2 (1 - \cos(36^\circ))$$

$$\cos(36^\circ) \approx 0,81 \approx 0,8$$

$$\sin(36^\circ) \approx 0,587$$

$$80 = 38y^2 (1 - \cos(36^\circ))$$

$$40 \approx 19 \cdot y^2 \cdot 0,2$$

$$y^2 \approx \frac{40}{0,2 \cdot 19} = \frac{80}{19} = \frac{20}{19}$$

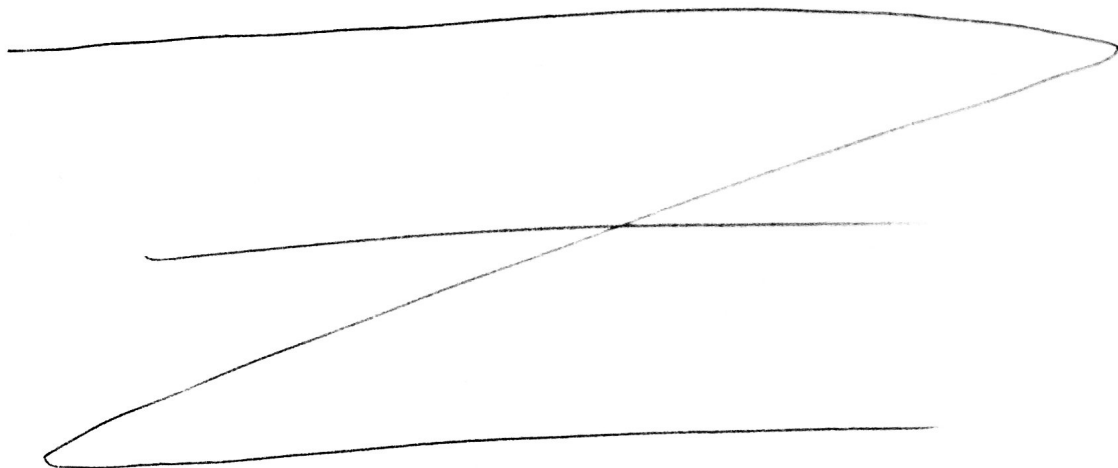
$$\Rightarrow S_{\triangle ACE} = \frac{1}{2} \cdot \sin(36^\circ) \cdot y^2 \approx \frac{1}{2} \cdot 0,587 \cdot \frac{20}{19} = \frac{587}{4 \cdot 19} \approx 7,5$$

$$\Rightarrow S_{\triangle ACE} \gg 3$$

■

что и требовалось доказать

Возможно, например, если 5 точек являются вершинами правильного пятиугольника.



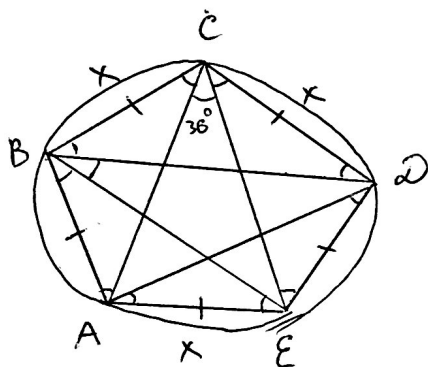
Задача 4 (5)

M 313(5)8

Если брать точки на большой расстоянии друг от друга, где площадь каждого треугольника будет очень велика, то найдутся 3 точки, образующие треугольник площадью больше 3.

Поэтому следует рассмотреть случай, когда площади других других треугольников максимально приближены к 2, или все равны 2.

Рассмотрим правильный пятиугольник:



на ребро АЕ опирает

Ребро АЕ служит основанием для треугольников $\triangle ABE$, $\triangle ACE$, $\triangle ADE$, где $\triangle ABE$ и $\triangle ADE$ будут равны по 3 сторонам.

Аналогично на другие ребра пятиугольника ABCDE опираются 3 треуг., где два из них равны.

При этом $\triangle BAE$ равен не только $\triangle AED$, но и $\triangle ABC$, $\triangle BCD$, $\triangle CED$. Пусть площади этих треугольников равны 2, максимальной величине, не противоречащей условию.

Тогда остается доказать, что площади $\triangle ACE$, $\triangle ACD$, $\triangle BCE$, $\triangle CDA$ не меньше 3 (переломленные треугольники равны между собой).

$$\angle BCD = \frac{5-2}{5} \cdot 180^\circ = 108^\circ$$

Пусть $BC = x$

Р-и $\triangle BCD$

$$S_{BCD} = \frac{1}{2} \cdot \sin(108^\circ) \cdot x^2 = 2$$

$$\sin(108^\circ) \approx 0,95$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{95}{100} \cdot x^2 = 2$$

$$\frac{195 \cdot x^2}{100} = 4 \Rightarrow 19x^2 = 80$$

$$x^2 = \frac{80}{19} \Rightarrow x = \frac{4\sqrt{5}}{\sqrt{19}}$$