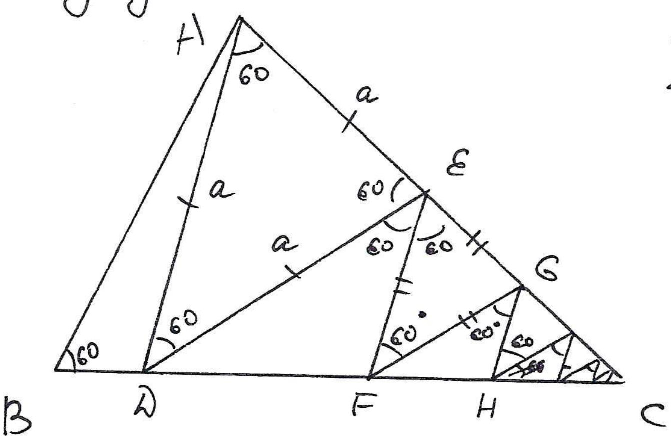
№1.

Ответ: Да, может.

Приведу пример, когда муха пролетит более 12 м. Это возможно, если она вылетит под углом 60° к стороне AC:



$\angle DAE = 60^\circ$

$\angle ADE = 60^\circ$ (по усл.) $\Big| \Rightarrow \angle AED = 60^\circ$

$\triangle ADE$ - равносторонний

$AD = DE = AE = a$

$\angle DEF = 60^\circ \Rightarrow \angle FEG = 60^\circ$

$\angle EFG = 60^\circ$

$\angle FEG = 60^\circ$ $\Big| \Rightarrow \triangle FEG$ - равносторонний $\Rightarrow$

$\Rightarrow EG = FE = FG = в$

Заметим, что все треугольники опирающиеся на сторону AC - равносторонние, так же заметим, что эти треугольники включают в себя два пути мухи и часть стороны AC, которые равны между собой.

Муха прекратит своё движение, когда окажется в углу C ~~##~~ (т.к. ей не куда будет лететь).

Таким образом длину траектории мухи можно обозначить как 2 ~~#~~ AC.

Найдём сторону AC из $\triangle ABC$ по теореме синусов:

{стр. 1}

$$\frac{AC}{\sin 60} = \frac{AB}{\sin 45}$$

$$\frac{AC \cdot 2}{\sqrt{3}} = \frac{5 \cdot 2}{\sqrt{2}}$$

$$AC = \frac{5\sqrt{6}}{2}$$

Т.к. траектория равна $2AC$, то она равна $5\sqrt{6}$ или $\sqrt{150}$.

$12 = \sqrt{144} \Rightarrow \sqrt{150} > \sqrt{144} \Rightarrow 5\sqrt{6} > 12$, а значит траектория мухи в определенный момент станет больше 12.

№2

По условию сказано, что $\overline{x_k} < x_k$, для $2 \le k \le 6$ и $\overline{x_k} > x_k$, для $7 \le k \le 12$

Подставим средние значения в данные ~~н~~ неравенства:

$\overline{x_2} < x_2$ | $\overline{x_3} < x_3$ | $\overline{x_4} < x_4$

$\frac{1}{2}(x_1 + x_2) < x_2$ | $\frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3) < x_3$ | $\frac{1}{4}(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) < x_4$

$x_1 < x_2$ | $\frac{1}{2}(x_1 + x_2) < x_3$ | $\frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3) < x_4$

$\overline{x_1} < x_2$ | $\overline{x_2} < x_3$ | $\overline{x_3} < x_4$

Заметим, что кол-во произведенного товара в n месяц $(n \in [2, 6])$ большее, чем среднее производство товара с начала года, а значит ~~при добавлении эт~~ в этом месяце среднее значение возрастет.

То есть получаем, что:

$\overline{x_1} < \overline{x_2} < \overline{x_3} < \overline{x_4} < \overline{x_5} < \overline{x_6}$.

Просчитаем значения для $k > 6$:

$\overline{x_7} > x_7$	$\overline{x_8} > x_8$	$\overline{x_9} > x_9$
$\frac{1}{7}(x_1+x_2+\ldots+x_7) > x_7$	$\frac{1}{8}(x_1+x_2+\ldots+x_8) > x_8$	$\frac{1}{9}(x_1+x_2+\ldots+x_9) > x_9$
$\frac{1}{6}(x_1+x_2+\ldots+x_6) > x_7$	$\frac{1}{7}(x_1+x_2+\ldots+x_7) > x_8$	$\frac{1}{8}(x_1+x_2+\ldots+x_8) > x_9$
$\overline{x_6} > x_7$	$\overline{x_7} > x_8$	$\overline{x_8} > x_9$

Заметим, что среднее значение до данного месяца больше, чем кол-во произведенного товара в этот месяц, а значит среднее значение в нем уменьшится; то есть: $\overline{x_6} > \overline{x_7} > \overline{x_8} > \overline{x_9} > \overline{x_{10}} > \overline{x_{11}} > \overline{x_{12}}$

Таким образом, мы имеем 2 неравенства:

$$\begin{cases} \overline{x_1} < \overline{x_2} < \overline{x_3} < \overline{x_4} < \overline{x_5} < \overline{x_6} \\ \overline{x_6} > \overline{x_7} > \overline{x_8} > \overline{x_9} > \overline{x_{10}} > \overline{x_{12}} \end{cases} \Rightarrow \overline{x_6} \text{ — максимальное среднее значение.}$$

Ответ: ~~$\overline{x_6}$~~ в 6 месяце.

№3

Так как все дети подарили разное кол-во подарков, то из N детей максимальное кол-во подарков было $(N-1)$, а минимальное 0.

Тогда всего было подарено $\frac{N(N-1)}{2}$.

Докажем, что при чётном N ~~то~~ условие точно не будет выполняться:

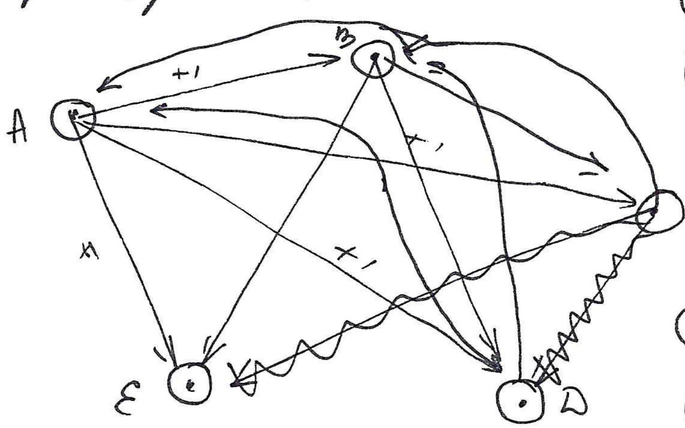
Так как каждый ребенок получил одинаковое кол-во подарков, то

{3 стр}

Общее кол-во подарков должно нацело делиться на N. Тогда $\frac{(N-1)\cdot N}{2} \vdots N$, но это невозможно при чётном N, т.к. $(N-1)$ - число нечётное, тогда получаем что $\frac{N(N-1)}{2} = 0{,}5N\cdot(N-1)$ при делении на N получим, ~~что~~ $0{,}5(N-1)$, т.к. $(N-1)$ - нечётное число, то $\frac{(N-1)}{2}$ - ~~хх~~ число рациональное, а значит $\frac{N(N-1)}{2} \not\vdots N$, что означает, что при чётных N условие не будет выполняться.

Докажем, что при любом нечётном значении N данное условие будет выполняться: $(N-1)$ - чётно, т.к. N - нечётно значит $\frac{N(N-1)}{2} : N = \frac{(N-1)}{2}$, т.к. $(N-1)$ - чётно то оно нацело разделится на $2 \Rightarrow$ при нечётном N возможно ~~распределение~~ выполнить заданное условие

пример при $N = 5$:



(A) подарил 4 получил 2

(B) подарил 3 получил 2

(C) подарил 1 получил 2

(D) подарил 2 получил 2

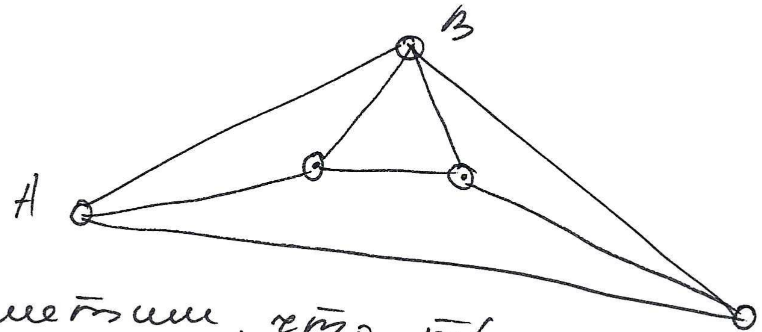
(E) подарил 0 получил 2

Ответ: при нечётных N.

1

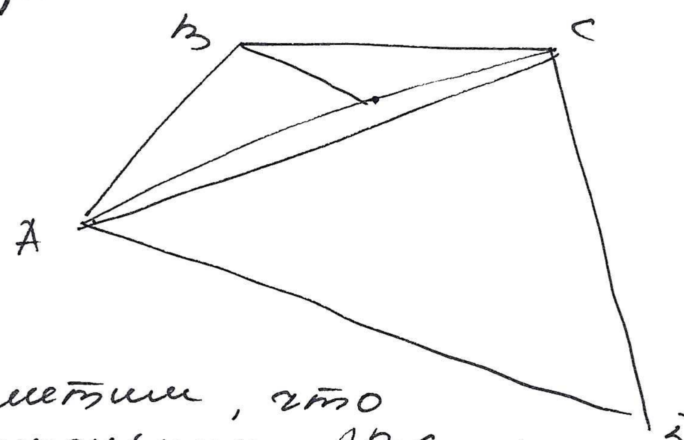
№4

1) Если периметр - треугольник, а внутри 2 точки



Заметим, что треугольник ABC возможно разбить на 4 треугольника по условию площадь каждого из них больше 2, а значит ~~область~~ площадь $\triangle ABC$ больше 8 $\Rightarrow$ больше 3

2) Если периметр - четырехугольник, а внутри него точка:



Заметим, что треугольник ABC реально разбить на три треугольника, а у которых площадь больше 2 $\Rightarrow S_{ABC} > 6 \Rightarrow S_{ABC} > 3$

Следовательно для любого набора из 5 точек существует такой треугольник.

{5 стр}

№5

$$\begin{cases} 1)\ xy - 2y = x + 106 \\ 2)\ yz + 3y = z + 39 \\ 3)\ zx + 3x = 2z + 438 \end{cases}$$

Из ① и ② выразим y и приравняем:

$$y = \frac{x+106}{x-2} = \frac{z+39}{z+3}$$

$$xz + 106z + 3x + 318 = xz + 39x - 2z - 78$$

$$108z + 396 = 36x$$

$x = 3z + 11$, подставим найденное значение x в 3 уравнение:

$$z(3z+11) + 3(3z+11) = 2z + 438$$

$$3z^2 + 11z + 9z + 33 = 2z + 438$$

$$3z^2 + 18z - 405 = 0$$

$$z^2 + 6z - 1\cancel{0}^{3}5 = 0$$

$$135 = 15 \cdot 9$$

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = -6 \\ z_1 \cdot z_2 = -135 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} z_1 = 9 \\ z_2 = -15 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} y_1 = \dfrac{39+9}{9+3} = 4 \\ y_2 = \dfrac{-15+39}{-15+3} = -2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = \overset{3\cdot 9+11}{\cancel{\dfrac{9+106}{9-2}}} = 38 \\ x_2 = 3\cdot(-15)+11 = -34 \end{matrix}$$

Ответ: $(x_1; y_1; z_1) = (38; 4; 9)$

$(x_2; y_2; z_2) = (-34; -2; -15)$