№5

$$\begin{cases} xy-2y=x+106 \\ yz+3y=z+39 \\ zx+3x=2z+438 \end{cases} \quad \begin{cases} y(x-2)=(x-2)+108 \\ y(z+3)=(z+3)+36 \\ x(z+3)=2(z+3)+432 \end{cases} \quad \begin{cases} (x-2)(y-1)=108=36\cdot3 \quad (1) \\ (z+3)(y-1)=36=36\cdot1 \quad (2) \\ (z+3)(x-2)=432=36\cdot12 \quad (3) \end{cases}$$

$$(1)\cdot(2)\cdot(3)=(x-2)^2\cdot(y-1)^2\cdot(z+3)^2=(36\cdot36)^2$$

$$\Rightarrow (x-2)(y-1)(z+3)=\pm36\cdot36 \quad (4)$$

Используем подстановку (1), (2), (3) в выражение (4):

$$\begin{cases} 36\cdot1\cdot(x-2)=\pm36\cdot36 \\ 36\cdot12\cdot(y-1)=\pm36\cdot36 \\ 36\cdot3(z+3)=\pm36\cdot36 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2=\pm36 \\ y-1=\pm3 \\ z+3=\pm12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=38,-34 \\ y=4,-2 \\ z=9,-15 \end{cases}$$

Т.к произведения 2-ух множителей в (1), (2), (3) всегда положительно $\Rightarrow$ корни либо все положительны, либо все отрицательны.

Ответ: $(38,4,9)$; $(-34,-2,-15)$.

№2

По условию: $\bar{x}_k < x_k$, при k от 2 до 6; $\bar{x}_k > x_k$, при k от 7 до 12 $\Rightarrow$

1) $\bar{x}_1 = x_1$

2) $2\bar{x}_2 = x_1+x_2 < 2x_2 \Rightarrow \bar{x}_1 < x_2 \Rightarrow 2\bar{x}_1 < x_1+x_2 \Rightarrow 2\bar{x}_1 < 2\bar{x}_2 \Rightarrow \bar{x}_1 < \bar{x}_2$

3) $3\bar{x}_3 = x_1+x_2+x_3 < 3x_3 \Rightarrow 2\bar{x}_2 < 2x_3 \Rightarrow \bar{x}_2 < x_3 \Rightarrow 3\bar{x}_2 < 2\bar{x}_2 + x_3 \Rightarrow 3\bar{x}_2 < x_1+x_2+x_3$
$\Rightarrow 3\bar{x}_2 < 3\bar{x}_3 \Rightarrow \bar{x}_2 < \bar{x}_3$

4) $4\bar{x}_4 = x_1+x_2+x_3+x_4 < 4x_4 \Rightarrow 3\bar{x}_3 < 3x_4 \Rightarrow \bar{x}_3 < x_4 \Rightarrow 4\bar{x}_3 < 3\bar{x}_3 + x_4 \Rightarrow$
$\Rightarrow 4\bar{x}_3 < 4\bar{x}_4 \Rightarrow \bar{x}_3 < \bar{x}_4$

6) $6\bar{x}_6 = x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6 < 6x_6 \Rightarrow 5\bar{x}_5 < 5x_6 \Rightarrow \bar{x}_5 < x_6 \Rightarrow 6\bar{x}_5 < 5\bar{x}_5 + x_6$
$\Rightarrow 6\bar{x}_5 < 6\bar{x}_6 \Rightarrow \bar{x}_5 < \bar{x}_6$

7) $7\bar{x}_7 = x_1+x_2+x_3+\dots+x_6+x_7 > 7x_7 \Rightarrow 6\bar{x}_6 > 6x_7 \Rightarrow \bar{x}_6 > x_7 \Rightarrow 7\bar{x}_6 > 6\bar{x}_6 + x_7$
$\Rightarrow 7\bar{x}_6 > 7\bar{x}_7 \Rightarrow \bar{x}_6 > \bar{x}_7$

8) $8\bar{x}_8 = x_1+x_2+x_3+\dots+x_7+x_8 > 8x_8 \Rightarrow 7\bar{x}_7 > 7x_8 \Rightarrow \bar{x}_7 > x_8 \Rightarrow 8\bar{x}_7 > 7\bar{x}_7 + x_8 \Rightarrow$
$\Rightarrow 8\bar{x}_7 > 8\bar{x}_8 \Rightarrow \bar{x}_7 > \bar{x}_8$

и т.д. до 12.

В итоге получаем, что:
$\bar{x}_1 < \bar{x}_2 < \bar{x}_3 < \bar{x}_4 < \bar{x}_5 < \bar{x}_6 > \bar{x}_7 > \bar{x}_8 > \bar{x}_9 > \bar{x}_{10} > \bar{x}_{11} > \bar{x}_{12} \Rightarrow \bar{x}_6$ - наибольшее.

Ответ: в 6 месяце.

№3

Всего N детей.

Пусть K - количество полученных каждым ребёнком подарков, тогда $N \cdot K$ - кол-во всех подарков.

Пусть x_i - кол-во подаренных каждым ребёнков подарков, но тогда ($x_i < N$ т.к. нельзя дарить одному больше ~~эт~~ одного подарка и нельзя дарить подарок себе), $x_i \neq x_n$, при $i \neq n$.

$\Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_{N-1} + x_N = N \cdot K$;

расставим левую часть уравнения в порядке возр-я так, что:

$x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_N$;

Исходя из условия логично предположить, что:

$x_1 = 0$; $x_2 = 1$; $x_3 = 2 \ldots x_N = N-1$.

$0+1+2+3\ldots+N-1 = N \cdot K$; по формуле суммы ~~эл~~ арифм. прогрессии получаем:

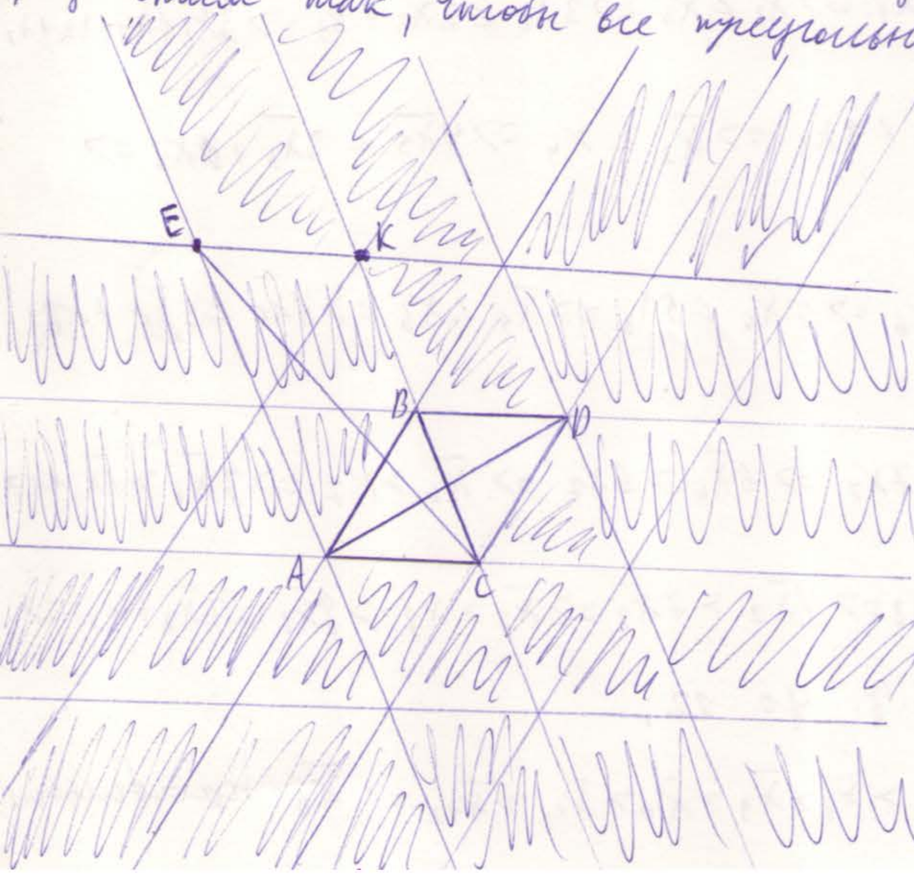
$$\frac{0+N-1}{2} \cdot N = N \cdot K \Rightarrow \frac{N-1}{2} = K \Rightarrow N = 2K+1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow N$ - нечётное.

Ответ: при нечётном N.

№4

Пусть ABC - треугольник с площадью $S=2$, точку D (4-ю) разместим так, чтобы все треугольники, образованные любыми



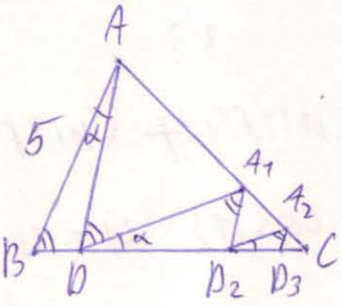
тремя точками имели $S=2$. $\Rightarrow ABCD$ - параллелограмм. (т.к. диагонали параллелограмма делят S пополам) Для размещения пятой точки E исключим все области, в которых Δ будет иметь $S<2$, исходя из $S = \frac{1}{2}ah$ (в этих областях тре-ки будут иметь одно основание, но меньшую высоту). Эти области будут заштрихованы. Отметим т. E в области удовлетворяющей условию:

$S_{\Delta AED} = \frac{1}{2} S_{AEKC}$; $AEKC$ - параллелограмм, $S_{AEKC} = 4 S_{ABC} = 8 \Rightarrow$

$\Rightarrow S_{AEC} = 4 > 3 \Rightarrow$ найдётся

Ответ: [illegible]

№1



$\angle B = 60°$

$\angle C = 45°$

$\Rightarrow \angle A = 75°$ (по сумме углов)

$AB = 5$

$L > 12$ − ?

Решение:

По т. Синусов:

$\frac{AB}{\sin 45°} = \frac{AC}{\sin 60°} = \frac{BC}{\sin 75°}$; $AC = \frac{AB \cdot \sin 60°}{\sin 45°} = \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$;

$BC = \frac{AB \cdot \sin 75°}{\sin 45°} = \frac{5 \cdot \sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{2}}$

$\boxed{\sin 75° = \sqrt{\frac{1-\cos 150°}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}}$

Предположим, что длина траектории L зависит от угла под которым вылетает муха из т. A, тогда обозначим $\angle BAD = \alpha$;

при $\alpha = 0$, $L = AB + BC = 5 + \frac{5 \cdot \sqrt{2+\sqrt{3}}}{\sqrt{2}} < 12$;

при $\alpha = 75°$, $L = AC = \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{2}} < 12$;

Из ΔBAD, по т. Синусов:

$\frac{AB}{\sin(120-\alpha)} = \frac{BD}{\sin\alpha} = \frac{AD}{\sin 60°} \Rightarrow AD = \frac{AB \cdot \sin 60°}{\sin(120°-\alpha)} = \frac{5\sqrt{3}}{2 \cdot \sin(120°-\alpha)}$;

Из ΔADA_1; по т. Синусов: $\frac{AA_1}{\sin 60°} = \frac{DA_1}{\sin(75°-\alpha)} = \frac{AD}{\sin(45°+\alpha)}$;

$DA_1 = \frac{AD \cdot \sin(75°-\alpha)}{\sin(45°+\alpha)} = \frac{5\sqrt{3} \cdot \sin(75°-\alpha)}{2 \cdot \sin(120°-\alpha) \cdot \sin(45°+\alpha)}$;

$AA_1 = \frac{AD \cdot \sin 60°}{\sin(45°+\alpha)} = \frac{5 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{4 \cdot \sin(120°-\alpha) \cdot \sin(45°+\alpha)}$; $\Delta ADC \sim \Delta A_1D_2C$ − по II признаку ($\angle C$ − общий; $\angle DAC = \angle D_2A_1C$ − как соответственные)

$\frac{A_1C}{AC} = K$; $A_1C = AC - AA_1 = \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2} \cdot \sin(120°-\alpha) \cdot \sin(45°+\alpha)}\right)$

$\Rightarrow K = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2} \cdot \sin(120-\alpha) \cdot \sin(45+\alpha)}$; т.к. $\Delta ADA_1 \sim \Delta A_1D_2A_2$ по тому же признаку, с тем же коэффициентом подобия, делаем вывод, что:

$(A_1D_2 + D_2A_2) = K(AD + DA_1) \Rightarrow L = (AD + DA_1)(1 + K + K^2 \ldots) = (AD + DA_1) \cdot \frac{1}{1-K}$ − по формуле суммы убывающ. геометр. прогрессии.

$$l = \left(\frac{5\sqrt{3}}{2\cdot\sin(120^\circ-\alpha)} + \frac{5\sqrt{3}\cdot\sin(75^\circ-\alpha)}{2\cdot\sin(120^\circ-\alpha)\cdot\sin(45^\circ+\alpha)}\right)\cdot\frac{2\sqrt{2}\cdot\sin(120^\circ-\alpha)\cdot\sin(45^\circ+\alpha)}{\sqrt{3}}$$

$$= 5\sqrt{2}\cdot\cancel{1}\cdot\sin(45^\circ+\alpha) + 5\sqrt{2}\cdot\sin(75^\circ-\alpha) = 5\sqrt{2}(\sin(45^\circ+\alpha) + \sin(75^\circ-\alpha)) =$$

$$= 5\sqrt{2}\cdot 2\cdot\sin 60^\circ\cdot\cos(15^\circ-\alpha) = 10\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\cos(15-\alpha) = \frac{10\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\cdot$$

$\cos(15-\alpha)$. L_{MAX}, при $\alpha = 15^\circ$ (т.к. $\cos = 1$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow L_{MAX} = \frac{10\sqrt{3}}{\sqrt{2}} > 12 \Rightarrow$ может

Ответ: может.