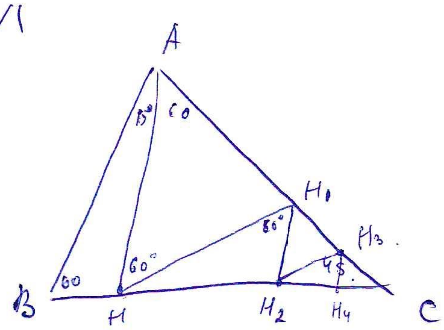
№1




Докажем, что если муха полетит так, что $\angle CAH = 60°$, то в некоторый момент она пролетит больше 12 метров.

Пусть $AHH_1H_2\dots$ – траектория мухи.

$\angle BAC = 75 \Rightarrow \angle BAH = 15°$

по т. синусов $\frac{AB}{\sin(90+15)} = \frac{AH}{\sin 60} \Rightarrow AH = \frac{AB \cdot \sin 60}{\cos 15}$.

$\cos 15 = \cos(60-45) = \frac{1+\sqrt3}{2\sqrt2} \Rightarrow AH = \frac{5\cdot\sqrt3\cdot 2\sqrt2}{2\cdot(1+\sqrt3)} = \frac{5\sqrt6}{1+\sqrt3}$.

$\angle HHH_2 = 15°$ $\angle HH_1H_2 = 60°$ (по условию) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{HH_1}{\sin(90+15)} = \frac{H_1H_2}{\sin 15} \Rightarrow \frac{HH_1}{H_1H_2} = \frac{\cos 15°}{\sin 15°} \Rightarrow \frac{H_1H_2}{HH_1} = tg\,15$.

$tg\,15° = tg(60°-45°) = \frac{\sqrt3-1}{\sqrt3+1} \Rightarrow$ ~~$H_1H_2 = \frac{\sqrt3-1}{\sqrt3+1}$~~ $H_1H_2 = tg\,15 \cdot HH_1$

Заметим, что $AH \parallel H_1H_2 \parallel H_3H_4\dots$ и $HH_1 \parallel H_2H_3 \parallel H_4H_5\dots$

Тогда $\triangle HH_1H_2 \sim \triangle H_2H_3H_4 \sim \dots \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{H_3H_4}{H_2H_3} = tg\,15$. Т.к. $\angle H_1AH = \angle AHH_1 = 60° \Rightarrow$

$\Rightarrow AH = HH_1$, аналогично $H_1H_2 = H_2H_3$ и т.д.

Значит длина траектории мухи равна, ~~если~~

$2(AH + AH\cdot tg\,15 + AH\cdot tg^2 15 + \dots +) =$

$= 2\cdot\frac{AH}{1-tg\,15°}$ (по формуле бесконечной геом. прогрессии)

$\Rightarrow$ надо док-ть что $\frac{2\cdot 5\sqrt6}{1+\sqrt3} : \left(1 - \frac{\sqrt3-1}{\sqrt3+1}\right) > 12 \Leftrightarrow$

$\frac{5\sqrt6}{1+\sqrt3} : \left(\frac{2}{1+\sqrt3}\right) > 6 \Leftrightarrow 5\sqrt6 > 12 \Leftrightarrow 150 > 144$

ч.т.д.

1

№2.

По условию

$x_1+x_2<2x_2 \Rightarrow \overline{x_1}<x_2$

$x_1+x_2+x_3<3x_3 \Rightarrow \overline{x_2}<x_3$

$x_1+x_2+x_3+x_4<4x_4 \Rightarrow \overline{x_3}<x_4$

$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5<5x_5 \Rightarrow \overline{x_4}<x_5$

$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6<6x_6 \Rightarrow \overline{x_5}<x_6$.

Заметим, что если $\overline{x_k}<x_{k+1}$, то

$$\overline{x_{k+1}} = \frac{k\cdot\overline{x_k}+x_{k+1}}{k+1} > \frac{(k+1)\cdot\overline{x_k}}{k+1} > \overline{x_k}$$

$\Downarrow$

$\overline{x_6}>\overline{x_5}>\overline{x_4}>\overline{x_3}>\overline{x_2}>\overline{x_1}$ (1)

Так же по условию

$x_1+x_2+x_3+x_4\ldots+x_7>7x_7 \Rightarrow \overline{x_6}>x_7$

$x_1+x_2+\ldots+x_8>8x_8 \Rightarrow \overline{x_7}>x_8$

$x_1+x_2+\ldots x_9>9x_9 \Rightarrow \overline{x_8}>x_9$

$x_1+x_2+\ldots+x_{10}>10x_{10} \Rightarrow \overline{x_9}>x_{10}$

$x_1+\ldots+x_{11}>11x_{11} \Rightarrow \overline{x_{10}}>x_{11}$

$x_1\ldots+x_{12}>12x_{12} \Rightarrow \overline{x_{11}}>x_{12}$.

Заметим, что если $\overline{x_k}>x_{k+1}$, то $\overline{x_k}>\overline{x_{k+1}}$ т.к.

$$\overline{x_{k+1}} = \frac{k\cdot\overline{x_k}+x_{k+1}}{k+1} < \frac{(k+1)\overline{x_k}}{k+1} < \overline{x_k}.$$

Значит $\overline{x_6}>\overline{x_7}>\overline{x_8}>\overline{x_9}>\overline{x_{10}}>\overline{x_{11}}>\overline{x_{12}}$ (2)

Из (1) и (2) следует, что $\overline{x_6}$ – наибольшее.

Ответ: $\overline{x_6}$.

№3.

Всего детей $N$, т.к. каждый дарил разное количество подарков, то ~~вс~~ ребенок мог подарить $0, 1, 2, \dots N-1$ подарок ~~...~~ ~~...~~ и т.к. различных значений $N$ $(0, 1, \dots N-1)$ и детей всего $N$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ ~~...~~ все значения $0, 1, \dots N-1$ — есть $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ всего было подарено $0+1+\dots N-1 = \frac{(N-1)\cdot N}{2}$ подарков.

С другой стороны, т.к. каждый получил поровну $\Rightarrow$ всего подарков было $k \cdot N$.

$\Rightarrow$ $k \cdot N = \frac{(N-1)\cdot N}{2}$ $\Rightarrow$ $N = 2k+1$ $\Rightarrow$ $N$ — нечетно.

~~...~~ Теперь покажем, что при всех нечетных $N$ это возможно. Обозначим детей $a_0, a_1 \dots a_{N-1}$. ~~и каждый~~ для $\forall a_i$ $a_i$ ребенок дарит $i$ подарков. Посмотрим на $a_i$ и $a_{N-i}$ ребенка. $(i \le \frac{N-1}{2})$

Пусть $N = 2k+1$ $\Rightarrow$ $a_0, \dots a_{2k}$ и рассмотрим $a_i$ и $a_{2k-i+1}$ $(i \le k)$. Пусть $a_i$ дарит $i$ подарков ~~для~~ каждому $i$ детям, ~~...~~ пусть тогда $a_{2k-i+1}$ подарит подарки оставшимся $2k-i+1$ детям. ~~...~~ Тогда $a_i$ и $a_{2k-i+1}$ подарят вместе по 1 ~~под~~ подарку ~~...~~ всем $2k+1$ детям. Заметим, что $a_i$ и $a_{2k+1-i}$ для $1 \le i \le k$ таких пар будет всего $k$ и причем все дети от $a_1 \dots a_{2k+1}$ в этих парах есть $\Rightarrow$ У каждого будет по $k$ подарков, и ~~...~~ $a_i$ ребенок подарит $i$ подарков.

Ответ: для любых нечетных $N \geq 1$.

№5 По условию:

$$\begin{cases} y(x-2) = x+106 \\ y(z+3) = z+39 \\ \cancel{x}(z+3) = 2z+438. \end{cases}$$

Сделаем замену $t = z+3$

$$\begin{cases} y(x-2) = x+106 \\ yt = t+36 \\ xt = 2t+432. \end{cases}$$

Заметим, что $t \neq 0$ (иначе $0 = 36$ противоречие)

Значит:

$$\begin{cases} y = \frac{t+36}{t} \\ x = \frac{2t+432}{t} \\ y(x-2) = x+106 \end{cases} \Rightarrow$$

Решим ур-ние: $\frac{t+36}{t} \cdot \left(\frac{2t+432}{t} - 2\right) = \frac{2t+432}{t} + 106$

~~т.к. $t$~~ $\Rightarrow$

$$\cancel{\frac{t+36}{t}} \quad \frac{1}{t}\left(\frac{(t+36)\cdot 432}{t}\right) = \frac{108t+432}{t}$$

т.к. $\frac{1}{t}$ не равно $0 \Rightarrow \frac{(t+36)\cdot 432}{t} = 108t+432.$

т.к. $t \neq 0 \Rightarrow (t+36)432 = 108t^2+432t$

$36 \cdot 432 = 108t^2 \Rightarrow t^2 = 144$

Значит $t = -12$ или $t = 12.$

$t = 12$ или $t = -12$

1) $y = \frac{t+36}{t}$

$y = \frac{12+36}{12} = 4$

~~$x = 2 + 12t$~~

2) $x = \frac{2t+432}{t}$

$x = 2 + \frac{432}{12}$

$x = 38$

1) $y = \frac{t+36}{t}$

$y = \frac{24}{-12} = -2$

2) $x = \frac{2t+432}{t}$

$x = 2 + \frac{432}{-12}$

$x = 2 - 36$

$x = -34.$

~~Вер~~ т.к. $t = z+3 \Rightarrow z = t-3$.

Значит система имеет два решения

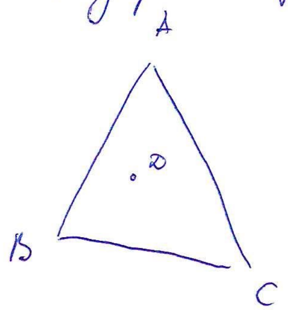
в $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 38 \\ y = 4 \\ z = 9 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -34 \\ y = -2 \\ z = -15 \end{cases} \end{array}\right.$

Ответ: $(-34, -2, -15)$ и $(38, 4, 9)$.

№4.

Рассмотрим выпуклую оболочку данных пяти точек. Она состоит хотя бы из 3-х точек.

Если она состоит из трёх точек A,B,C тогда оставшиеся две точки D и E лежат внутри треугольника ABC. Тогда.

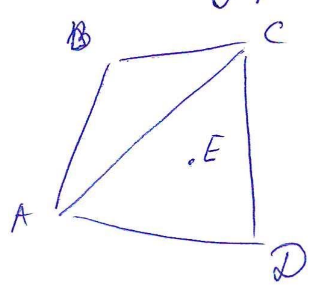



т.к. по условию $S_{ADB} \geq 2$, $S_{ADC} \geq 2$, $S_{BDC} \geq 2$ ⇒

⇒ $S_{ABC} = S_{ADB} + S_{ADC} + S_{BDC} \geq 6$

т.е. $S_{ABC} \geq 3$.

Если она состоит из 4 точек. т.е. A,B,C,D – выпуклая оболочка, а точка E лежит внутри выпуклой оболочки




Заметим, что точка E лежит в одном из △ABC или ACD.

(не может лежать на AC, т.к. $S_{AEC} \geq 2$).

Не теряя общности пусть точка E лежит в △ACD тогда $S_{ACD} = S_{AEC} + S_{CED} + S_{AED} \geq 6$ т.е.

$S_{ACD} \geq 3$.

• Если выпуклая оболочка состоит из 5 точек ⇒ ABCDE – выпуклый пятиугольник. (где ABCDE – выпуклая оболочка).