N5

$$\begin{cases} xy-2y=x+106 \\ yz+3y=z+39 \\ zx+x=2z+438 \end{cases}$$

Из I уравнения следует, что:

$$xy-2y=x+106$$

$$y(x-2)=x+106$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=2 \\ x=-106 \end{cases} \text{— неверно} \\ \begin{cases} y=\dfrac{x+106}{x-2} \\ x\neq 2 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$y=\frac{x+106}{x-2} \quad (1)$$

$$x(y-1)=106+2y$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=1 \\ 106=-2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=1 \\ y=-53 \end{cases} \text{— неверно} \\ \begin{cases} y\neq 1 \\ x=\dfrac{106+2y}{y-1} \end{cases} \end{array}\right.$$

$$x=\frac{106+2y}{y-1} \quad (2)$$

Из II уравнения следует, что:

$$yz+3y=z+39$$

$$y(z+3)=z+39$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} z=-3 \\ z=-39 \end{cases} \text{— неверно} \\ \begin{cases} z\neq -3 \\ y=\dfrac{z+39}{z+3} \end{cases} \end{array}\right.$$

$$(y-1)z=39-3y$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=1 \\ y=13 \end{cases} \text{— неверно} \\ \begin{cases} y\neq 1 \\ z=\dfrac{39-3y}{y-1} \end{cases} \end{array}\right.$$

$$y=\frac{z+39}{z+3} \quad (3) \qquad z=\frac{39-3y}{y-1} \quad (4)$$

Из III уравнения следует, что:

$$zx+3x=2z+438$$

$$x(z+3)=2z+438$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} z=-3 \\ z=-219 \end{cases} \text{— неверно} \\ \begin{cases} z\neq -3 \\ x=\dfrac{2z+438}{z+3} \end{cases} \end{array}\right.$$

$$z(x-2)=438-3x$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=2 \\ x=146 \end{cases} \text{— неверно} \\ \begin{cases} x\neq 2 \\ z=\dfrac{438-3x}{x-2} \end{cases} \end{array}\right.$$

$$x=\frac{2z+438}{z+3} \quad (5) \qquad z=\frac{438-3x}{x-2} \quad (6)$$

(продолжение на стр. 2)

По выведенным равенствам (4) и (6) следует, что:

$$\left.\begin{array}{l} z=\dfrac{438-3x}{x-2} \\ z=\dfrac{39-3y}{y-1} \end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{438-3x}{x-2}=\dfrac{39-3y}{y-1}$$

По выведенному равенству (2): $x=\dfrac{106+2y}{y-1}$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{438-\dfrac{318+6y}{y-1}}{\dfrac{106+2y}{y-1}-2}=\frac{39-3y}{y-1}$$

$$\frac{438y-438-318-6y}{108}=\frac{39-3y}{y-1}$$

$$\frac{432y-756}{108}=\frac{39-3y}{y-1}$$

$$4y-7=\frac{39-3y}{y-1}$$

$$(y-1)(4y-7)=39-3y$$

$$4y^2+7-11y=39-3y$$

$$4y^2-8y-32=0$$

$$y^2-2y-8=0$$

$$\frac{D}{4}=1+8=9>0$$

$$y=1\pm\sqrt{9}$$

$$\left[\begin{array}{l} y=4 \\ y=-2 \end{array}\right.$$

Подставляя в выведенные равенства, находим что:

При $y=4$

$x=38$

$z=9$

При $y=-2$

$x=-34$

$z=-15$

Ответ: $\begin{cases} x=38 \\ y=4 \\ z=9 \end{cases}$ и $\begin{cases} x=-34 \\ y=-2 \\ z=-15 \end{cases}$

№3

Так как все дети подарили разное количество, то учитывая, что их N, то 1-ый подарил 0 подарков, 2-ой 1 подарок ..., N-ый (N-1) подарок. (т.к. N подарков подарить нельзя, ведь для каждого ребёнка остальных детей (N-1))

Итого было подарено $\frac{(N-1)((N-1)+1)}{2} = \frac{(N-1)N}{2}$ подарков

Т.к. каждый получил равное число подарков, то мы их общее количество делим на N, чтобы получить число подарков, которое получил каждый.

$\frac{(N-1)N}{2} : N = \frac{(N-1)}{2}$ подарков получил каждый $\Rightarrow$ N – обязательно нечётное

Как составлять пример для любого $N \equiv 1 \pmod 2$ и большего 1:

Запишем каждый подарок в виде $(x;y)$, где x – номер того кто подарил, а y – номер того, кто получил. Тогда для „x" мы будем выбирать по одному разу числа из набора (2, 3, 3, 4, 4, 4 ...) где X_k число встречается $(X_k - 1)$ раз (итого $\frac{N(N-1)}{2}$ чисел в первом наборе), когда как для „y" мы будем выбирать по одному разу числа из набора (1, 1 ... N, N) где y_i встречается $\frac{(N-1)}{2}$ раза (итого $\frac{N(N-1)}{2}$ чисел в втором наборе)

Таким образом у нас будет $\frac{N(N-1)}{2}$ пар чисел, что полностью описывают наш пример

Ответ: N – нечётное

№2

При $\overline{x_k} < x_k$

$$\begin{cases} k\cdot\overline{x_k} < k\cdot x_k \\ \overline{x_k} = \frac{1}{k}(x_1+x_2+\dots+x_k) \end{cases}$$

$\to x_1+x_2+\dots+x_{k-1} < (k-1)x_k$

$$\frac{1}{(k-1)}(x_1+x_2+\dots+x_{k-1}) < x_k$$

$$\overline{x_{k-1}} < x_k$$

$\exists\ \overline{x_{k-1}} = x_k - m$, где $m<0$

Тогда т.к.

$$\overline{x_k} = \frac{\overline{x_{k-1}}\cdot(k-1)+x_k}{k}$$

$$\left.\begin{aligned} k\overline{x_k} &= \overline{x_{k-1}}\cdot(k-1)+x_k \\ x_k &> \overline{x_{k-1}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow k\overline{x_k} = \overline{x_{k-1}}(k-1)+x_k > \overline{x_{k-1}}\,k$

$$\overline{x_k} > \overline{x_{k-1}}$$

Подставив на место k 2, 3, 4, 5, 6

Получаем, что $\overline{x_6}>\overline{x_5}>\overline{x_4}>\overline{x_3}>\overline{x_2}>\overline{x_1}$

При $\overline{x_k} > x_k$

$$\left.\begin{aligned} k\cdot\overline{x_k} &> k\cdot x_k \\ \overline{x_k} &= \frac{1}{k}(x_1+x_2+\dots+x_k) \end{aligned}\right\}$$

$$x_1+x_2+\dots+x_{k-1} > (k-1)x_k$$

$$\frac{1}{(k-1)}(x_1+x_2+\dots+x_{k-1}) > x_k$$

$$\overline{x_{k-1}} > x_k$$

$\exists\ \overline{x_{k-1}} = x_k+m$, где $m>0$

Тогда т.к.

$$\overline{x_k} = \frac{\overline{x_{k-1}}\cdot(k-1)+x_k}{k}$$

$$\left.\begin{aligned} k\overline{x_k} &= \overline{x_{k-1}}\cdot(k-1)+x_k \\ \overline{x_{k-1}} &> x_k \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow k\overline{x_k} = \overline{x_{k-1}}\cdot(k-1)+x_k < \overline{x_{k-1}}\,k$

$$\Downarrow$$

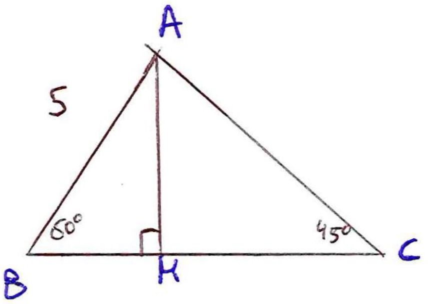
$$\overline{x_k} < \overline{x_{k-1}}$$

Подставив на место k 7, 8, 9, 10, 11, 12 выясняем, что ($\overline{x_6}>\overline{x_7}>\overline{x_8}>\overline{x_9}>\overline{x_{10}}>\overline{x_{11}}>\overline{x_{12}}$)

$\overline{X_6}$ – наибольшее

Ответ: в июне (шестой месяц) было наибольшее среднее производство товара сначала года

№1 Решим вспомогательную задачу



Дано:
$\triangle ABC$
$AB = 5$
$\angle B = 60^\circ$
$\angle C = 45^\circ$
Найти:
AC

Решение

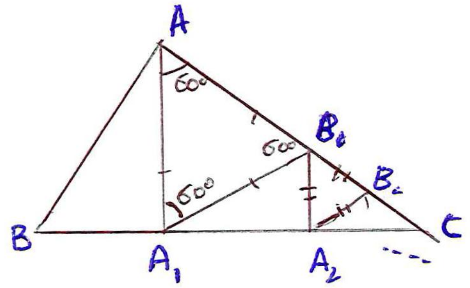
Проведём $AH \perp BC$, тогда:
1) Т.к. $AB = 5$ и $\angle B = 60^\circ \Rightarrow AH = 2{,}5\sqrt{3}$
2) Т.к. $\angle C = 45^\circ \Rightarrow AH = HC$

$\Rightarrow$ Т.к. $\triangle AHC$ — прямоугольный, $AH = HC = 2{,}5\sqrt{3}$, по теореме Пифагора

$AC^2 = (2{,}5\sqrt{3})^2 \cdot 2$

$AC = 2{,}5\sqrt{6}$

А теперь приведём пример когда можно:
Теперь пускай муха идёт так:



откладывает от AC $\angle 60^\circ$ (что можно сделать т.к. $(180^\circ - 60^\circ - 45^\circ) = 75^\circ > 60^\circ$)
Тем самым т.к. будут хотя бы 2 угла 60°, то $\triangle AA_1B_1$, $\triangle B_1A_2B_2$, $\triangle B_2A_3B_3$ .... — равносторонние $\Rightarrow$ $AA_1 + A_1B_1 = 2AB_1$
$B_1A_2 + A_2B_2 = 2B_1B_2$
$\vdots$
$B_kA_{k+1} + A_{k+1}B_{k+1} = 2B_{k+1}B_k$
$\vdots$
$\Downarrow$
Заметим, что т.к. путь мухи — ломаная $AA_1B_1A_2B_2\ldots$, то длина её пути будет стремиться к ($2AC = 2 \cdot 2{,}5\sqrt{6}$)
Сравним $2AC$ и 12
$5\sqrt{6} \vee 12$
$25 \cdot 6 \vee 144$
$150 > 144 \Rightarrow 2AC > 12$ $\Rightarrow$

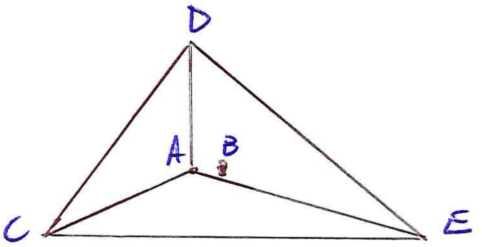
$\Rightarrow$ когда-нибудь да будет так, что муха пройдёт больше 12 м

Ответ: да, может

№4

Выделим у этих точек выпуклую оболочку:

I. Если 2 точки (A и B) оказались внутри выпуклой оболочки, то

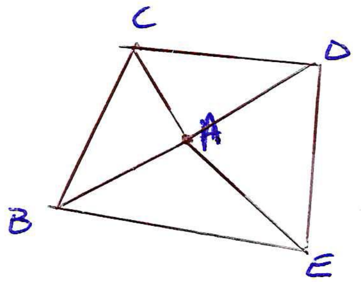


Заметим, что $\left.\begin{array}{l} S_{\triangle CAD}>2 \\ S_{\triangle DAE}>2 \\ S_{\triangle CAE}>2 \end{array}\right\} S_{\triangle CDE}>6>3$

ч.т.д.

$S_{\triangle CDE}>3$

II. Если 1 точка (A) оказалась внутри выпуклой оболочки, то



Заметим, что либо т. $A \in \triangle DBE$, либо т. $A \in \triangle CBD$

$\Downarrow$

Если т. $A \in \triangle DBE \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \triangle DAE \in \triangle DBE \\ \triangle BAE \in \triangle DBE \end{array}\right\} \Rightarrow$

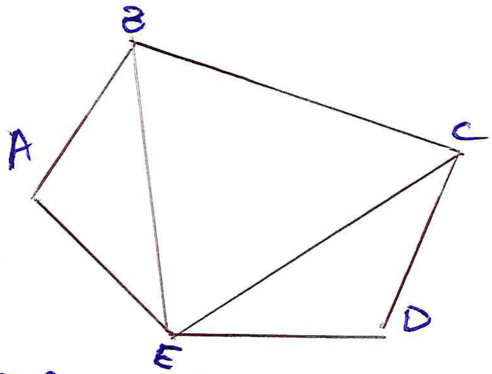
$\Rightarrow$ т.к. $\left.\begin{array}{l} S_{\triangle DAE}>2 \\ S_{\triangle BAE}>2 \end{array}\right\} \Rightarrow S_{\triangle DBE}>4>3$

$S_{\triangle DBE}>3$ ч.т.д.

Аналогично если т. $A \in CBD$

III. Если выпуклая оболочка образует пятиугольник, то $S_{ABCDE}>6$, т.к.

$\left\{\begin{array}{l} S_{\triangle ABE}>2 \\ S_{\triangle BCE}>2 \\ S_{\triangle CDE}>2 \end{array}\right.$



Т.к. это выпуклый пятиугольник, то в нём всегда можно выделить треугольник, площадь которого будет не меньше половины от площади пятиугольника

$\left.\begin{array}{l} \text{...пятиугольника} \\ S_{ABCDE}>6 \end{array}\right\} \Rightarrow$ найдётся $\triangle$, чья $S_{\triangle}>3$