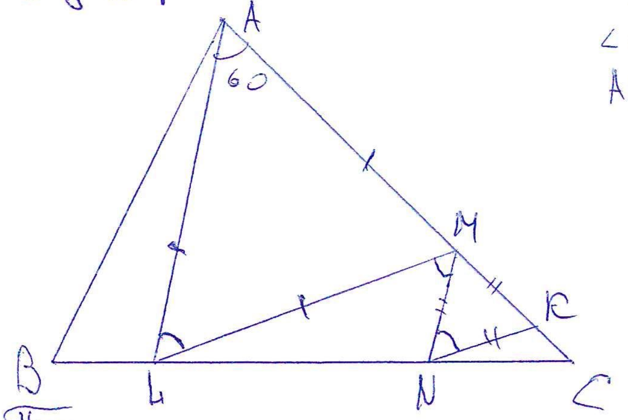
Задача 1



$\angle B = 60°$
$\angle C = 45°$
$AB = 5м.$

Для того, чтобы доказать что муха пролетит больше 12 метров, необходимо и достаточно привести пример, когда она пролетит больше 12 метров

Пусть тогда муха вылетит под углом 60° к стороне AC.

$\angle LAM = 60$. $\Rightarrow \angle AML = 180 - \angle LAM - \angle ALM = 60° \Rightarrow \triangle ALM$ - равносторонний.

$\angle NMK = 180 - \angle LMA - \angle LMN = 60°$

$\angle MKN = 180 - \angle MNL - \angle NMK = 60° \Rightarrow \triangle NMK$ - равносторонний

Значит муха может разбить свой путь на равносторонние треугольники, двигаясь по двум сторонам каждого треугольника, а третья сторона каждого такого треугольника будет лежать на отрезке AC. Получаем:

$S_м = 2AC$, где $S_м$ - путь мухи

По т. синусов для $\triangle ABC$:

$$\frac{AB}{\sin\angle C} = \frac{AC}{\sin\angle B} = 2R \Rightarrow AC = \frac{AB \cdot \sin\angle B}{\sin\angle C}$$

$$AC = \frac{5\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} AC^2 = 37{,}5 \\ 6^2 = 36 \end{array}\right| \Rightarrow AC^2 > 6^2$$

$AC > 6$
$(AC \geq 0)$

$\Rightarrow 2AC > 12$

$S_м = 2AC \Rightarrow S_м > 12 \Rightarrow$ такое возможно

Ответ: да, может.

Задача 2

При n от 1 до 6:

1) $x_n > \overline{x_n}$

$x_n > \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n)$

$n x_n > x_1 + x_2 + \ldots + x_n$

$n x_n - x_n > x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1}$

$(n-1) x_n > x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1}$

$x_n > \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1}}{n-1}$

$x_n > \overline{x_{n-1}}$

2)

$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1}}{n-1} = \overline{x_{n-1}}$

$x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} = (n-1)\overline{x_{n-1}}$

$\overline{x_n} = \frac{x_1 + x_n}{n} = \frac{(x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1}) + x_n}{n} = \frac{(n-1)\overline{x_{n-1}} + x_n}{n}$

так как $x_n > \overline{x_{n-1}}$, то $\frac{(n-1)\overline{x_{n-1}} + x_n}{n} > \frac{(n-1)\overline{x_{n-1}} + x_{n-1}}{n} > \overline{x_{n-1}}$

$\Rightarrow \overline{x_n} = \frac{(n-1)\overline{x_{n-1}} + x_n}{n}$, а $\frac{(n-1)\overline{x_{n-1}} + x_n}{n} > \overline{x_{n-1}} \Rightarrow \overline{x_n} > \overline{x_{n-1}}$

Заметим, что для n от 7 до 12 меняется только знак неравенства (то есть получаем всё то, что выше, только с противоположным знаком.) ($\overline{x_n} < \overline{x_{n-1}}$)

$\Rightarrow$ получаем, что $\overline{x_6} > \overline{x_5} > \overline{x_4} > \overline{x_3} > \overline{x_2} > \overline{x_1}$

и $\overline{x_{12}} < \overline{x_{11}} < \overline{x_{10}} < \overline{x_9} < \overline{x_8} < \overline{x_7} < \overline{x_6}$. Откуда видно, что $\overline{x_6}$ самое большое

Ответ: в 6 месяце.

Задача 3.

Заметим, что один ребёнок не мог подарить другому больше 1 подарка $\Rightarrow$ ни один ребёнок не может подарить больше $N-1$ подарков (если он дарит каждому по одному подарку, то выходит ровно $N-1$) Все дети подарили разное число подарков $\Rightarrow$ получается, что 0 подарков подарил 1 человек, 1 подарок подарил тоже 1 человек и т.д. $\Rightarrow$ какой-то ребёнок подарил $N-1$ подарок $\Rightarrow$ всего подарков было подарено $0+1+2+\ldots+(N-1)=\frac{(N-1)N}{2}$

Тогда каждый ребёнок получил $\frac{(N-1)N}{2N}=\frac{N-1}{2}$

Заметим, что число $\frac{N-1}{2}$ - целое $\Rightarrow$ N - нечётное

Докажем, что при любом нечётном N такое возможно.

Пусть x_n - ребёнок который подарил $N-1$ подарок

Тогда x_1 никому не дарил подарок. Разделим всех детей на пары, так чтобы дети в паре не дарили подарки одному и тому же человеку.

В парах будут дети: x_2 и x_n
x_3 и x_{n-1}
x_4 и x_{n-2}
...

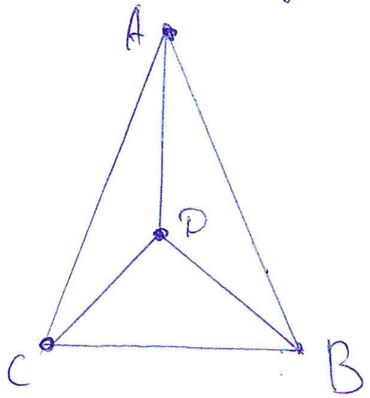
(Заметим что чисел от 2 до n - чётное кол-во, так как n - нечётное $\Rightarrow$ пары хватит каждому)

Заметим, что пар ровно $\frac{N-1}{2}$, а так как каждая пара дарит по одному подарку каждому (обязательно но чтобы они подарили подарок друг другу), то у каждого ребёнка будет $\frac{N-1}{2}$ подарка $\Rightarrow$ у каждого ребёнка будет одинаковое кол-во подарков $\Rightarrow$ такое возможно для каждого нечётного $N>1$

Ответ: для любого нечётного $N>1$

Задача 4

I Рассмотрим вогнутый пятиугольник. Получается что у нас получится точка лежит внутри треугольника который не ~~...~~ меньше 2:



$S_{ADC} \ge 2$

$S_{ADB} \ge 2$

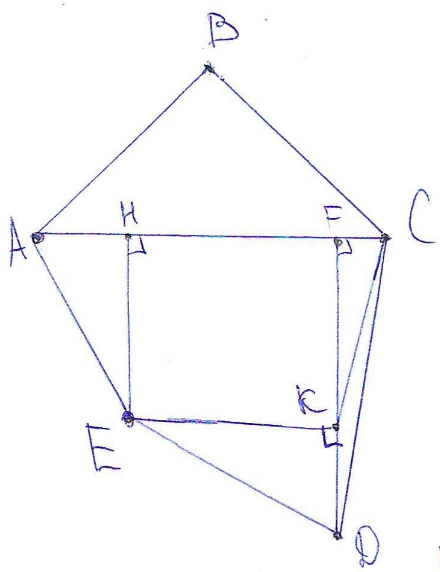
$S_{DCB} \ge 2$

$\Rightarrow S_{ABC} = S_{ADC} + S_{ADB} + S_{DCB}$

$\Rightarrow S_{ABC} \ge 6$

$\Rightarrow$ для вогнутого пятиугольника такой треугольник всегда найдётся.

II Рассмотрим выпуклый пятиугольник



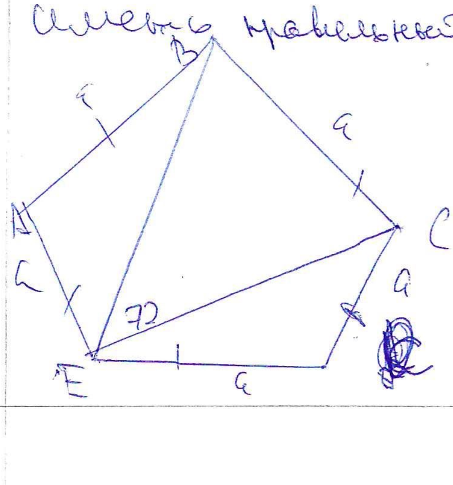
Проведём диагональ AC

Проведём высоты EH и DF на диагональ AC.

Пусть DF > HE.

Проведём высоту EK на FD.

Заметим, что $S_{ABCKE} < S_{ABCDE}$ при этом каждый треугольник остался не меньше 2 => наименьшую площадь будет иметь правильный пятиугольник.



Каждый угол правильного пятиугольника 108.

$S_{ECD} \ge 2$

$S_{EAB} \ge 2$

$EC > a$; $BE > a$ (углы EAB и EDC ≥ ...)

$\Rightarrow S_{BEC} \ge 1{,}5\, S_{ECD} \Rightarrow S_{BEC} \ge 3$

Задача 5

$$\begin{cases} xy-2y=x+106 & \text{I} \\ yz+3y=z+39 & \text{II} \\ zx+3x=2z+438 & \text{III} \end{cases}$$

Выразим z из II: $z=\dfrac{39-3y}{y-1}$

Выразим z из III: $z=\dfrac{438-3x}{x-2}$

Тогда $\dfrac{39-3y}{y-1}=\dfrac{438-3x}{x-2}$

$(39-3y)(x-2)=(438-3x)(y-1)$

$39x-78-3xy+6y=438y-438-3xy+3x$

$36x+360=432y$

$x+10=12y$

$x=12y-10 \quad (1)$

Выразим x из I: $x=\dfrac{106+2y}{y-1} \quad (2)$

Приравняем (1) и (2):

$\dfrac{12y-10}{1}=\dfrac{106+2y}{y-1}$

$106+2y=(12y-10)(y-1)$

$12y^2-24y-96=0$

$y^2-2y-8=0$

$D=4+32=6^2$

$y_1=\dfrac{2-6}{2}=-2$

$y_2=\dfrac{2+6}{2}=4$

$x=12y-10$

$x_1=-34$

$z=\dfrac{39-3y}{y-1}$

$z_1=-15$

$x=12y-10$

$x_2=38$

$z=\dfrac{39-3y}{y-1}$

$z_2=9$

Ответ: $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_1=-34 \\ y_1=-2 \\ z_1=-15 \end{cases} \\ \begin{cases} x_2=38 \\ y_2=4 \\ z_2=9 \end{cases} \end{array}\right.$